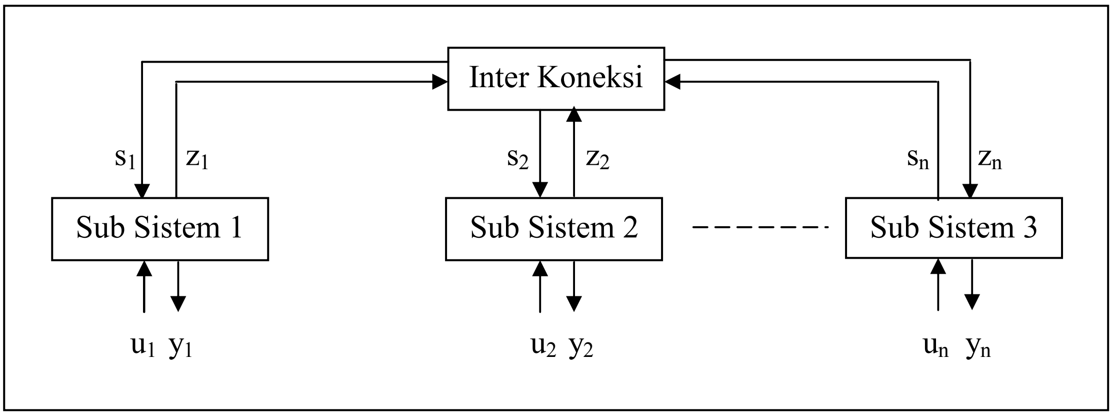
BAB II

MODEL DAN STRUKTUR

II.1. MODEL INTERAKSI DAN MODEL INPUT-OUTPUT

Sistem pengendalian berhirarki dapat dimodelkan dalam bentuk model interaksi seperti terlihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1. Model Interaksi

di mana:

u_i = eksternal input ke subsistem i

y_i = eksternal output dari subsistem i

s_i = internal input ke subsistem i yang menyatakan pengaruh dari subsistem yang lain

z_i = internal output dari subsistem i yang mempengaruhi subsistem yang lain

x_i = state subsistem i

Model interaksi mempunyai persamaan:

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + E_i s_i$$

$$y_i = C_i x_i + D_i u_i + F_i s_i$$

$$z_i = C_{zi} x_i + D_{zi} u_i + F_{zi} s_i$$

$$s = L\,z$$

$$i = 1,2,\ldots,N = \text{banyaknya subsistem} \tag{2.1}$$

Bila interaksi antar subsistem adalah lemah ($s \approx 0$)

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i$$

$$y_i = A_i x_i + C_i x_i \tag{2.2}$$

berarti bahwa sistem tersebut didesentralisasi menjadi subsistem-subsistem yang independen,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \quad s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_N \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

maka,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & A_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & B_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} E_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & E_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_N \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

$$\dot{x} = (\text{diag } A_i)x + (\text{diag } B_i)u + (\text{diag } E_i)s$$

$$y = (\text{diag } C_i)x + (\text{diag } D_i)u + (\text{diag } F_i)s$$

$z = (\text{diag } C_{zi})x + (\text{diag } D_{zi})u + (\text{diag } F_{zi})s$

$s = L.z$ (2.5)

Bila informasi tentang interaksinya dieleminasi, diperoleh:

$\dot{x} = (\text{diag } A_i)x + (\text{diag } B_i)u + (\text{diag } E_i)Lz$

$y = (\text{diag } C_i)x + (\text{diag } D_i)u + (\text{diag } F_i)Lz$

$z = (\text{diag } C_{zi})x + (\text{diag } D_{zi})u + (\text{diag } F_{zi})Lz$ (2.6)

maka,

$$\begin{pmatrix} I & 0 & -(\text{diag}\,E_i)L \\ 0 & I & -(\text{diag}\,F_i)L \\ 0 & 0 & (I-(\text{diag}\,F_{zi})L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{diag } A_i \\ \text{diag } C_i \\ \text{diag } C_{zi} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \text{diag } B_i \\ \text{diag } D_i \\ \text{diag } D_{zi} \end{pmatrix} u$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & -(\text{diag}\,E_i)L \\ 0 & I & -(\text{diag}\,F_i)L \\ 0 & 0 & (I-(\text{diag}\,F_{zi})L \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} \text{diag } A_i \\ \text{diag } C_i \\ \text{diag } C_{zi} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \text{diag } B_i \\ \text{diag } D_i \\ \text{diag } D_{zi} \end{pmatrix} u \right) \quad (2.7)$$

Diperoleh persamaan tidak terstruktur (tanpa informasi tentang interaksinya) sebagai berikut:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du \quad (2.8)$$

di mana

$$A = \text{Baris pertama dari} \quad \begin{pmatrix} I & 0 & -(\text{diag}\,E_i)L \\ 0 & I & -(\text{diag}\,F_i)L \\ 0 & 0 & (I-\text{diag}\,F_{zi})L \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \text{diag}\,A_i \\ \text{diag}\,C_i \\ \text{diag}\,C_{zi} \end{pmatrix}$$

$$B = \text{Baris pertama dari} \quad \begin{pmatrix} I & 0 & -(\text{diag}\,E_i)L \\ 0 & I & -(\text{diag}\,F_i)L \\ 0 & 0 & (I-\text{diag}\,F_{zi})L \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \text{diag}\,B_i \\ \text{diag}\,D_i \\ \text{diag}\,D_{zi} \end{pmatrix}$$

$$C = \text{Baris kedua dari} \begin{pmatrix} I & 0 & -(\operatorname{diag} E_i)L \\ 0 & I & -(\operatorname{diag} F_i)L \\ 0 & 0 & (I - \operatorname{diag} F_{zi})L \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \operatorname{diag} E_i \\ \operatorname{diag} C_i \\ \operatorname{diag} C_{zi} \end{pmatrix}$$

$$D = \text{Baris kedua dari} \begin{pmatrix} I & 0 & -(\operatorname{diag} E_i)L \\ 0 & I & -(\operatorname{diag} F_i)L \\ 0 & 0 & (I - \operatorname{diag} F_{zi})L \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \operatorname{diag} B_i \\ \operatorname{diag} D_i \\ \operatorname{diag} D_{zi} \end{pmatrix}$$

dengan syarat determinan $(I - (\operatorname{diag} F_{zi}) \neq 0$

Dari identitas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a/c \\ 0 & 1 & -b/c \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix}$$

diperoleh:

$$\begin{pmatrix} I & 0 & -(\operatorname{diag} E_i)L \\ 0 & I & -(\operatorname{diag} F_i)L \\ 0 & 0 & (I - \operatorname{diag} F_{zi})L \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 & (\operatorname{diag} E_i)L\,(I - (\operatorname{diag} F_{zi})L)^{-1} \\ 0 & I & (\operatorname{diag} F_i)L\,(I - (\operatorname{diag} F_{zi})L)^{-1} \\ 0 & 0 & (I - (\operatorname{diag} F_{zi})L)^{-1} \end{pmatrix}$$

$A = \operatorname{diag} A_i + (\operatorname{diag} E_i)L\,(I - (\operatorname{diag} F_{zi})L)^{-1} \operatorname{diag} C_{zi}$

$B = \operatorname{diag} B_i + (\operatorname{diag} E_i)L\,(I - (\operatorname{diag} F_{zi})L)^{-1} \operatorname{diag} D_{zi}$

$C = \operatorname{diag} C_i + (\operatorname{diag} E_i)L\,(I - (\operatorname{diag} F_{zi})L)^{-1} \operatorname{diag} C_{zi}$

$D = \operatorname{diag} D_i + (\operatorname{diag} E_i)L\,(I - (\operatorname{diag} F_{zi})L)^{-1} \operatorname{diag} D_{zi}$

Bila sistem tidak memiliki *throughput* (input langsung menjadi output), persamaan sistem menjadi

$\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx$

di mana,

$A = \operatorname{diag} A_i + (\operatorname{diag} E_i)L\,(\operatorname{diag} C_{zi})$

B = diag B_i

C = diag C_i

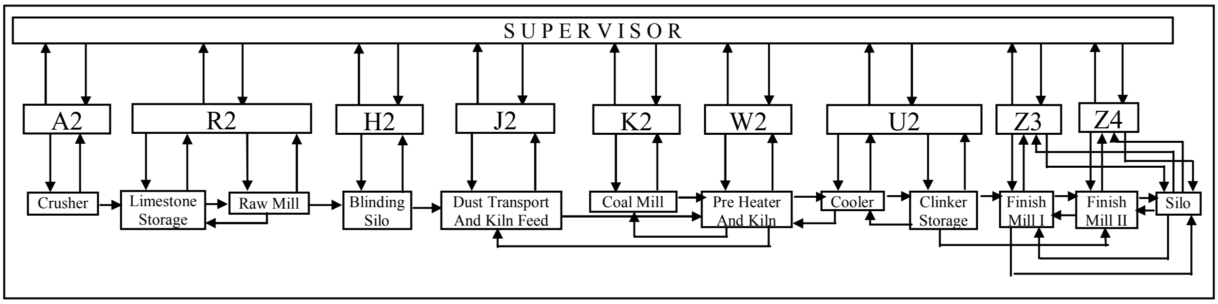
D = 0 (2.9)

Model ini disebut model input-output.

Hubungan antara model interaksi dan model input-output telah diselidiki secara mendetail oleh Ikeda dan Kodama (1973).

<u>Contoh 2.1.:</u>

Sistem pengendalian proses pembuatan semen menggunakan DCS didekomposisi menjadi 9 subsistem, di mana masing-masing subsistem memiliki state (x), aksi kendali (u) dan output (y). Antara satu subsistem dengan subsistem lain mempunyai hubungan. Hubungan-hubungan tersebut dijelaskan oleh aliran prosesnya. Gambar 2.1. menunjukkan aliran proses dan pengendaliannya,



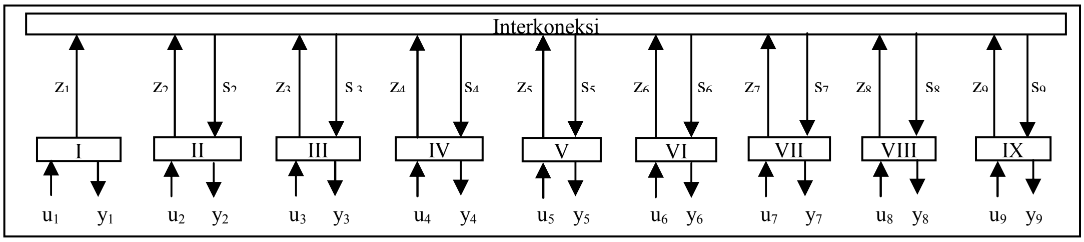
Gambar 2.1. Aliran Proses Dan Pengendaliannya

di mana A2, R2, dan seterusnya menunjukkan pengendali lokal atau pengendali level pertama dan supervisor menunjukkan pengendali level kedua (contoh ini diambil dari Darmadi, 1999).

Diinginkan model interaksi dan model input-output untuk sistem di atas.

Penyelesaian:

Dengan mempertimbangkan bahwa proses yang dikendalikan oleh pengendali lokal adalah satu subsistem, maka didapatkan sistem dengan model interaksi seperti pada Gambar 2.2,



Gambar 2.2. Model Sistem Pengendalian Berhirarki

di mana:

s_2 menginformasikan z_1

s_3 menginformasikan z_2 dan z_4

s_4 menginformasikan z_3 dan z_6

s_5 menginformasikan z_6

s_6 menginformasikan z_4 , z_5 dan z_7

s_7 menginformasikan z_6

s_8 menginformasikan z_7 dan z_9

s_9 menginformasikan z_7 dan z_8

Persamaan tiap subsistem dengan model interaksi adalah sebagai berikut:

a. Subsistem I

$$\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1$$

$$y_1 = C_1x_1 + D_1u_1$$

$$z_1 = C_{z1}x_1 + D_{z1}u_1$$

b. Subsistem II

$\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2 + E_2s_2$

$y_2 = C_2x_2 + D_2u_2 + F_2s_2$

$z_2 = C_{z2}\,x_2 + D_zu_2 + F_{z2}\,s_2$

$s_2 = L_{21}\,z_1$

c. Sub sistem III

$\dot{x}_3 = A_3x_3 + B_3u_3 + E_3s_3$

$y_3 = C_3x_3 + D_3u_3 + F_3s_3$

$z_3 = C_{z3}\,x_3 + D_zu_3 + F_{z3}\,s_3$

$s_3 = L_{32}\,z_2 + L_{34}\,z_4$

d. Sub sistem IV

$\dot{x}_4 = A_4x_4 + B_4u_4 + E_4s_4$

$y_4 = C_4x_4 + D_4u_4 + F_4s_4$

$z_4 = C_{z4}\,x_4 + D_{z4}\,u_4 + F_{z4}\,s_4$

$s_4 = L_{43}\,z_3 + L_{46}\,z_6$

e. Sub sistem V

$\dot{x}_5 = A_5x_5 + B_5u_5 + E_5s_5$

$y_5 = C_5x_5 + D_5u_5 + F_5s_5$

$z_5 = C_{z5}\,x_5 + D_{z5} + F_{z5}s_5$

$s_5 = L_{56}\,z_6$

f. Sub sistem VI

$\dot{x}_6 = A_6x_6 + B_6u_6 + E_6s_6$

$y_6 = C_6x_6 + D_6u_6 + F_6s_6$

$z_6 = C_{z6}x_6 + D_{z6} + F_{z6}\, s_6$

$s_6 = L_{64}\, z_4 + L_{65}\, z_5\, L_{67}\, z_7$

g. Sub sistem VII

$\dot{x}_7 = A_7x_7 + B_7u_7 + E_7s_7$

$y_7 = C_7x_7 + D_7u_7 + F_7s_7$

$z_7 = C_{z7}x_7 + D_{z7} + F_{z7}\, s_7$

$s_7 = L_{76}\, z_6$

h. Sub sistem VIII

$\dot{x}_8 = A_8x_8 + B_8u_8 + E_8s_8$

$y_8 = C_8x_8 + D_8u_8 + F_8s_8$

$z_8 = C_{z8}\, x_8 + D_{z8} + F_{z8}\, s_8$

$s_8 = L_{87}\, z_7 + L_{89}\, z_9$

i. Sub sistem IX

$\dot{x}_9 = A_9x_9 + B_9u_9 + E_9s_9$

$y_9 = C_9x_9 + D_9u_9 + F_9s_9$

$z_9 = C_{z9}\, x_9 + D_{z9} + F_{z9}s_9$

$s_9 = L_{97}\, z_7 + L_{98}\, z_8$ (2.10)

Dari persamaan sub sistem di atas, didapatkan matriks interaksi (L):

$$L = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & I & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & I & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

dan dengan menggunakan persamaan 2,1 sampai persamaan 2.9, diperoleh persamaan struktur sistem dalam model input output:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_2C_{z1} & A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_3C_{z2} & A_3 & E_3C_{z4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_4C_{z3} & A_4 & 0 & E_4C_{z6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_5 & E_5C_{z5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_6C_{z4} & E_6C_{z5} & A_6 & E_6C_{z7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_7C_{z6} & A_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_8C_{z7} & A_8 & E_8C_{z9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_9C_{z7} & E_9C_{z8} & A_9 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_9 \end{pmatrix} U$$

$$y = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_2C_{z1} & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_3C_{z2} & C_3 & F_3C_{z4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_4C_{z3} & C_4 & 0 & F_4C_{z6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_5 & F_5C_{z5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_6C_{z4} & F_6C_{z5} & C_6 & F_6C_{z7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_7C_{z6} & C_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_8C_{z7} & C_8 & F_8C_{z9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_9C_{z7} & F_9C_{z8} & C_9 \end{pmatrix} x$$

(2.11)

II.2. SIFAT-SIFAT STRUKTURAL SISTEM PENGENDALIAN

Hubungan input-state-output dari suatu sistem pengendalian dapat dinyatakan dalam bentuk graph berarah, di mana input, state, dan output dari sistem tersebut merupakan *vertex* (*node*) dari graph yang dibentuk. Penyelidikan mengenai struktur dari sistem dinamik telah diberikan oleh Reinschke (1988). Graph berarah yang diperlukan untuk aplikasi struktur sistem dapat ditemukan dalam buku karangan Even (1979) atau Walther dan N ä gler (1987).

Pasangan *vertex* (V_k, V_l) merupakan *arc* (*edge*) dari graph tersebut apabila dalam persamaan sistemnya V_l dipengaruhi secara langsung oleh V_k.

Path (lintasan) dari V_i ke V_j adalah himpunan *edge-edge* yang menghubungkan V_i ke V_j $=\{(V_i,V_k), (V_k,V_l), \ldots, (V_m,V_j)\}$ dengan memperhatikan arah dari tiap *edge* yang membentuknya. *Vertex-vertex* V_i dan V_j dikatakan terhubung dengan kuat (*strongly connected*) jika dan hanya jika terdapat path dari V_i ke V_j dan sebaliknya. Bila kondisi tersebut tidak dipenuhi dikatakan terhubung dengan lemah (*weakly connected*).

Matriks Q adalah matriks kedekatan (*adjacency matrix*) di mana tiap elemen dari Q adalah sebagai berikut:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ bila } (V_j, V_i) \text{ adalah edge dalam graph tersebut} \\ 0 \text{ bila } (V_j, V_i) \text{ adalah edge dalam graph tersebut} \end{cases} \tag{2.12}$$

Matriks R adalah matriks ketercapaian (*reachability matrix*) dengan elemen-elemen sebagai berikut:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ bila ada path dari } V_j \text{ ke } V_i \\ 0 \text{ bila tidak ada path dari } V_j \text{ ke } V_i \end{cases} \tag{2.13}$$

Contoh 2.2.:

Diketahui persamaan sistem:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u$$

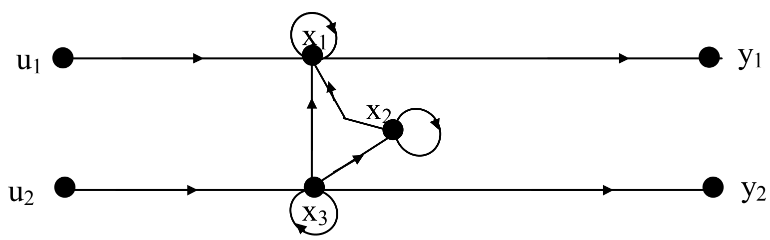
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

(contoh diambil dari example 2.1, Lunze (1992).

Dapatkan representasi sistem dalam bentuk graph berarah, matriks kedekatan dan matriks ketercapaian.

Penyelesaian:

Presentasi Graph :



Matriks kedekatan (Q) dari sistem di atas adalah:

$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & u_1 & u_2 & y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ u_1 \\ u_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.15}$$

Sedangkan matriks ketercapaiannya (R) adalah

$$R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & u_1 & u_2 & y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ u_1 \\ u_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.16}$$

II.3. STRUKTURAL CONTROLLABLE DAN OBSERVABLE

Structural rank (S-rank) dari matriks struktur S_a adalah angka maksimal dari elemen-elemen dalam matriks struktur S_a yang independent entry.

Algoritma mencari s-rank dari Jamshidi (1997), adalah:

Langkah 1. Eliminasi baris atau kolom matriks A yang hanya mempunyai nol, dimensi menjadi N X M

Langkah 2. Jika Min(N,M)=1, generik rank A, gr(A) = 1 (g) = 1. Jika Min(N,M) = 0 maka gr(A) = 0(g)

Langkah 3. Identifikasi entry tidak nol dalam matriks A dengan maksimum nol dalam kolom atau barisnya

Langkah 4. Hitung generik rank A_1, yang adalah matriks A original keluar baris atau kolom seperti pada langkah 3. Jika $gr(A_1) = Min(N,M) - 1$, maka $gr(A) = 1 + gr(A_1)$

Langkah 5. Hitung generik rank A_2, yaitu matriks A original setelah melakukan langkah 3 dengan mengidentifikasi nol. Maka $gr(A) = r(g) = Max[1+gr(A_1), gr(A_2)]$, maka s-rank adalah gr(A)

Menurut Lunze (1992), sistem dikatakan *input connectable* (atau *input reachable*) jika ada lintasan ke setiap state dari sedikitnya satu input, dan dikatakan *output connectable* (atau *output reachable*) jika ada lintasan dari state ke sedikitnya satu output.

Sedangkan sistem dikatakan *Structural Controllable* (*S-Controllable*) jika dan hanya jika:

1. Sistem tersebut *input connectable*
2. Sistem tersebut mempunyai

$$\text{s-rank}(Sa \quad Sb) = n \tag{2.17}$$

di mana n=banyaknya state

dan sistem dikatakan *Structural Observable* (*S-Observable*) jika dan hanya jika:

1. Sistem tersebut *output connectable*
2. Sistem tersebut mempunyai

$$\text{s-rank}\begin{pmatrix} S_a \\ S_c \end{pmatrix} = n \tag{2.18}$$

di mana n=banyaknya state

Contoh 2.3.:

Dari sistem pada contoh 2.1., ingin diketahui apakah sistem s-controllable dan s-observable?

Penyelesaian:

Sistem mempunyai matriks struktur sebagai berikut:

$$S_a = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_2 & A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_3 & A_3 & E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_4 & A_4 & 0 & E_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_5 & E_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_6 & E_6 & A_6 & E_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_7 & A_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_8 & A_8 & E_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_9 & E_9 & A_9 \end{pmatrix} \quad S_b = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_9 \end{pmatrix}$$

$$S_c = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_9 \end{pmatrix}$$

Struktural rank (S-Rank) dari ($S_a \quad S_b$) menentukan *S-controllable* sistem tersebut. Dari matriks struktur di atas, diperoleh

$$\begin{pmatrix} S_a & S_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_2 & A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_3 & A_3 & E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_4 & A_4 & 0 & E_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_5 & E_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_6 & E_6 & A_6 & E_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_7 & A_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_8 & A_8 & E_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_9 & E_9 & A_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S_a & S_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & *^{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & *^{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & *^{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & *^{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & *^{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & *^{3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & *^{4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & *^{8} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & *^{9}
\end{pmatrix}$$

sehingga S-Rank (S_a S_b) = 9. Hal ini menunjukkan bahwa sistem tersebut mempunyai S-Rank (S_a S_b) sama dengan banyaknya state.

S-Rank dari $\begin{pmatrix} S_a \\ S_c \end{pmatrix}$ menentukan *S-observable* sistem. Dari matriks struktur diperoleh

$$\begin{pmatrix} S_a \\ S_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
E_2 & A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & E_3 & A_3 & E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & E_4 & A_4 & 0 & E_4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & A_5 & E_5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & E_6 & E_6 & A_6 & E_6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_7 & A_7 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_8 & A_8 & E_8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_9 & E_9 & A_9 \\
C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & C_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & C_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & C_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_6 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_7 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_8 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_9
\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} S_a \\ S_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & * & * & * & * & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\
*^{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & *^{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & *^{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & *^{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & *^{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & *^{6} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & *^{7} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & *^{8} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & *^{9}
\end{pmatrix}$$

sehingga S-Rank $\begin{pmatrix} S_a \\ S_c \end{pmatrix}$ = 9. Hal ini menunjukkan bahwa sistem tersebut mempunyai S-Rank (S_a S_b) sama dengan banyaknya state.

Dari perhitungan di atas dapat disimpulkan bahwa sistem adalah S-Controllable karena sistem tersebut *input reachable*, yaitu ada lintasan yang menghubungkan tiap state dari salah satu input dan mempunyai S-Rank (S_a S_b)

sama dengan banyaknya state, yaitu 9 dan sistem adalah S-Observable, karena sistem tersebut *output reachable,* yaitu ada lintasan yang menghubungkan tiap state ke paling sedikit satu output dan mempunyai S-Rank $\begin{pmatrix} S_a \\ S_c \end{pmatrix}$ sama dengan banyaknya state, yaitu 9.

II.4. DEKOMPOSISI BERDASARKAN STRONGLY COUPLED SYSTEM

Menurut Lunze (1992), dengan mengamati struktur matriks L pada persamaan 2.1, suatu sistem dapat didekomposisi menjadi beberapa subsistem di mana subsistem-subsistem tersebut dapat disusun dalam struktur berhirarki.

Matriks L tersebut adalah:

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots \\ L_{21} & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

di mana elemen-elemen matriks L adalah:

$$[L] = \begin{cases} 0 & \text{bila } L_{ij} = 0 \\ I & \text{bila } L_{ij} \neq 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

Diperoleh beberapa subsistem dengan interaksi yang diberikan oleh [L], kemudian [L] diatur ulang penomoran dari subsistemnya, sehingga diperoleh matriks *lower diagonal*

$$[L]' = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ L_{n1} & \cdots & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

Pengelompokkan tersebut dilakukan dengan melihat pada graph struktur dari sistem tersebut berdasarkan matriks interaksi L dengan memperhatikan:

- Dua *vertex* i dan j dikatakan s*trongly coupled* jika dan hanya jika ada lintasan dari i ke j dan dari j ke i
- *Vertex* yang *strongly coupled* dikatakan berada dalam kelas ekivalen yang sama
- Himpunan *vertex* N oleh matriks L didekomposisi menjadi beberapa kelas ekivalen
- Dengan satu transformasi urutan dari *vertex* dan kelasnya dibuat supaya diperoleh L' yang berupa matriks *lower diagonal*

Transformasi dari L menjadi L' dilakukan melalui matriks transformasi sejenis P, sedemikian hingga:

$$L' = P^T L P \tag{2.22}$$

P adalah matriks dengan elemen yang didefinisikan sebagai berikut:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ bila elemen i pada L ingin dipindah menjadi elemen j pada } L' \\ 0 \text{ yang lainnya} \end{cases} \tag{2.23}$$

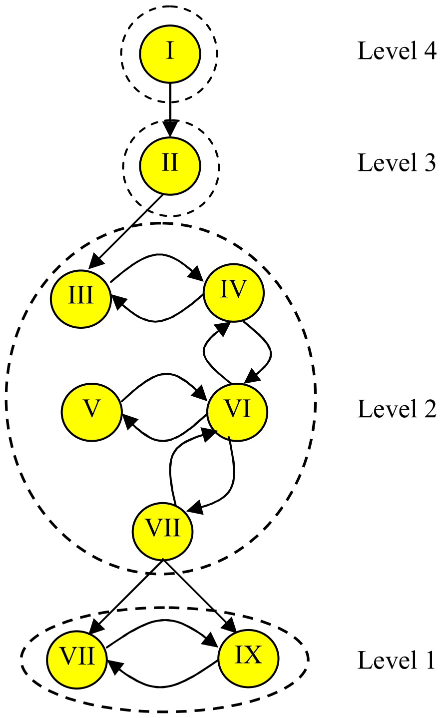
Sistem-sistem yang telah didekomposisi, masing-masing disebut *strongly coupled system*. Dekomposisi sistem dapat mempermudah analisa kestabilan sistem, karena suatu sistem dikatakan stabil jika dan hanya jika semua *strongly coupled system* sistem tersebut stabil. Dekomposisi berhirarki terlebih dahulu diperkenalkan oleh Özgüner dan Perkins (1975), sementara Sezer dan $\tilde{S}$iljak (1981) dan Pichai *et al.* (1983) memasukkan dekomposisi berhirarki pada subsistem yang I/O *reachable*.

Contoh 2.4.:

Dari matrix L yang didapat pada contoh 2.1., dapatkan dekomposisi berdasarkan *strongly coupled system*.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan matrix L, maka dapat dicari graph struktur sistem yang menunjukkan hirarki dari sistem. Dengan membagi berdasarkan *strongly coupled system-nya*, didapatkan graph struktur seperti pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4. Graph Struktur Sistem

Dari graph struktur sistem pada Gambar 4.2., maka terlihat bahwa susunan penomoran pada matrix L telah menunjukkan bahwa sistem tersebut berhirarki. Hal ini menyebabkan tidak perlu dilakukan penomoran ulang untuk mendapatkan matrix L', karena matrix L' sama dengan matrix L. Karena sistem ini berhirarki, maka matrix L' merupakan matrix *lower diagonal*. Matrix L' dan matrix strukturnya adalah:

$$L' = \left(\begin{array}{c|c|ccccc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right) \quad \text{dan} \quad S_{L'} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{pmatrix}$$

Dari struktur matrix L', terbukti bahwa matrix tersebut merupakan *matrix lower diagonal*, sehingga dapat disimpulkan bahwa sistem pengendalian proses pembuatan semen menggunakan DCS di atas mempunyai struktur berhirarki.

Dengan dekomposisi diatas, maka terlihat bahwa sistem dibagi menjadi 4 subsistem baru yang mempunyai karakteristik *strongly coupled system*. Persamaan sistem tiap *strongly coupled system* adalah sebagai berikut:

1. SCS I (level 4)

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1$$

$$y_1 = C_1 x_1$$

2. SCS 2 (level 3)

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2$$

$$y_2 = C_2 x_2$$

3. SCS 3 (level 2)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3 & E_3C_{z4} & 0 & 0 & 0 \\ E_4C_{z3} & A_4 & 0 & E_4C_{z6} & 0 \\ 0 & 0 & A_5 & E_5C_{z6} & 0 \\ 0 & E_6C_{z4} & E_6C_{z5} & A_6 & E_6C_{z7} \\ 0 & 0 & 0 & E_7C_{z6} & A_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

4. SCS 4 (level 1)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_8 & E_8C_{z9} \\ E_9C_{z8} & A_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_8 & 0 \\ 0 & A_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_8 \\ y_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_8 & 0 \\ 0 & C_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_8 \\ x_9 \end{pmatrix}$$

(2.24)

II.5. SISTEM BERHIRARKI DENGAN SUBSISTEM YANG MEMPUNYAI I/O REACHABLE

Bentuk umum sistem hasil dekomposisi menjadi subsistem-subsistem yang *disjoint* adalah:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{i} A_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{i} B_{ij} u_j$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{i} C_{ij} x_j \qquad (2.25)$$

dengan syarat (A_{ii}, B_{ii}) adalah *controllable* dan (A_{ii}, C_{ii}) adalah *observable* untuk $i = 1,2 \ldots,n$

Persamaan sistem pada persamaan 2.25, dengan

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & 0 \\ A_{N1} & \cdots & \cdots & \cdots & A_{NN} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & 0 \\ B_{N1} & \cdots & \cdots & \cdots & B_{NN} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & 0 \\ C_{N1} & \cdots & \cdots & \cdots & C_{NN} \end{pmatrix}$$

mempunyai matirks kedekatan (Q) dan matriks ketercapaian (R) sebagai berikut:

$$Q = \begin{array}{c} \\ x \\ u \\ y \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & u & y \end{array} \\ \begin{pmatrix} [A] & [B] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ [C] & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$R = \begin{array}{c} \\ x \\ u \\ y \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & u & y \end{array} \\ \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ R_{yx} & R_{yu} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Syarat-syarat yang harus dipenuhi agar sistem menjadi sistem dengan struktur berhirarki dengan subsistem-subsistem yang I/O *reachable* adalah:

1. $$R_{XX} = \begin{pmatrix} R_{X_1X_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ R_{X_2X_1} & R_{X_2X_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R_{X_NX_1} & R_{X_NX_2} & & & R_{X_NX_N} \end{pmatrix} \qquad (2.26)$$

2. $$R_{XU} = \begin{pmatrix} R_{X_1U_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ R_{X_2U_1} & R_{X_2U_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R_{X_NU_1} & R_{X_NU_2} & & & R_{X_NU_N} \end{pmatrix} \qquad (2.21)$$

3. $$R_{YX} = \begin{pmatrix} R_{Y_1X_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ R_{Y_2X_1} & R_{Y_2X_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R_{Y_NX_1} & R_{Y_NX_2} & & & R_{Y_NX_N} \end{pmatrix} \qquad (2.27)$$

4. $$R_{yU} = \begin{pmatrix} R_{Y_1U_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ R_{Y_2U_1} & R_{Y_2U_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R_{Y_NU_1} & R_{Y_NU_2} & & & R_{Y_NU_N} \end{pmatrix} \qquad (2.28)$$

II.6. DEKOMPOSISI MENJADI SUBSISTEM-SUBSISTEM YANG DISJOINT

Dekomposisi *disjoint* menjadi subsistem-subsistem yang terdesentralisasi input dan terdesentralisasi output telah diperkenalkan oleh $\tilde{S}$iljak dan Vuk$\tilde{c}$evi$\dot{c}$ (1976), sedangkan Sezer dan $\tilde{S}$iljak (1984) memberikan metode dekomposisinya.

Dari persamaan sistem model input-output, akan di dekomposisi menjadi beberapa sub sistem, karenanya x dipecah menjadi $x_1, x_2, \ldots$,u dipecah menjadi $u_1, u_2, \ldots$, dan y dipecah menjadi $y_1, y_2, \ldots$.

di mana x_i, u_i, y_i adalah state, input, dan output dari subsistem i

dan $x = (x_1, x_2, x_{3,\ldots\ldots})$

$u = (u_1, u_2, u_{3,\ldots\ldots})$

$y = (y_1, y_2, y_{3,\ldots\ldots})$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots \\ B_{21} & B_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots \\ C_{21} & C_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Persamaan sistem dapat ditulis sebagai berikut:

$$\dot{x}_i = A_{ii} x_i + \sum_{j \neq i} A_{ij} x_j + B_{ii} u_i + \sum_{j \neq i} B_{ij} u_j$$

$$y_i = C_{ii} x_i + \sum_{j \neq i} C_{ij} x_j \tag{2.29}$$

Beberapa kejadian khusus:

1. $B_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$

$$\dot{x}_i = A_{ii} x_i + \sum_{j \neq i} A_{ij} x_j + B_{ii} u_i$$

$$y_i = C_{ii} x_i + \sum_{j \neq i} C_{ij} x_j \tag{2.30}$$

Disebut sistem dengan desentralisasi input

2. $C_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$

$$\dot{x}_i = A_{ii} x_i + \sum_{j \neq i} A_{ij} x_j + B_{ii} u_i + \sum_{j \neq i} B_{ij} u_j$$

$$y_i = C_{ii} x_i \tag{2.31}$$

Disebut sistem dengan desentralisasi output

3. $B_{ij} = 0$ dan $C_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$

$$\dot{x}_i = A_{ii} x_i + \sum A_{ij} x_j + B_{ii} u_i$$

$$y_i = C_{ii} x_i \tag{2.32}$$

Disebut sistem dengan desentralisasi input output

Untuk sistem terdesentralisasi seperti di atas, sebenarnya tidak membentuk subsistem-subsistem yang tidak berinteraksi satu sama lain, karena :

$$u_j \xrightarrow[B_{jj}]{} x_j \xrightarrow[A_{ij}]{} x_i \xrightarrow[C_{ii}]{} y_i$$

Untuk menghilangkan interaksi antar subsistem, maka

$$A_{ij} = 0 \ (i \neq j) \tag{2.33}$$

Bila A_{ij} bernilai cukup kecil (dibandingkan dengan B_{jj} dan C_{ii}), maka subsistem subsistemnya disebut "*weakly coupled*" (interaksi lemah).

Untuk membuat suatu sistem menjadi terdesentralisasi diperlukan suatu transformasi untuk membuat:

1. $B_{ij} \rightarrow 0$ bila diinginkan terdesentralisasi menurut inputnya
2. $C_{ij} \rightarrow 0$ bila diinginkan terdesentralisasi menurut outputnya
3. $B_{ij}, C_{ij} \rightarrow 0$ bila diinginkan terdesentralisasi menurut input outputnya

Untuk menjadi desentralisasi input:

$$\overline{x} = Q^{-1} y$$

$$Q = (b_1 \ Ab_1 ....A^{n_1 -1} b_1 \qquad b_2 \ Ab_2 ....A^{n_2 -1} b_2 \qquad b_m \ Ab_m ....A^{n_m -1} b_m)$$

$B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$

$n_1, n_2, \ldots, n_m$ dipilih sedemikian hingga Q dapat diinvers

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} Q\dot{\overline{x}} = AQ\overline{x} + Bu \\ y = CQ\overline{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{\overline{x}} = Q^{1}AQ\overline{x} + Q^{-1}Bu \\ y = CQ\overline{x} \end{array} \tag{2.34}$$

$$\dot{\overline{x}} = \overline{A}x + \overline{B}u$$
$$y = \overline{C}x$$

Untuk menjadi desentralisasi output:

$$Q = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_1 A \\ \vdots \\ C_1 A^{n_1 - 1} \\ C_2 \\ C_2 A \\ \vdots \\ C_2 A^{n_2 - 1} \\ \vdots \\ C_k \\ C_k A \\ \vdots \\ C_k A^{n_k - 1} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_k \end{pmatrix} \tag{2.35}$$