BAB III

KESTABILAN SISTEM

III.1. KESTABILAN BERDASARKAN POSISI EIGEN VALUE

Dari persamaan sistem pada persamaan, dapat dicari e*igen value.* E*igen value* sistem diperoleh dari persamaan karakteristik sistem. Persamaan tersebut adalah:

$$|\lambda I - A| = 0 \tag{3.1}$$

di mana λ adalah *eigen value* sistem. Banyaknya *eigen value* tergantung dari banyaknya state.

Suatu sistem dikatakan stabil, jika dan hanya jika semua *eigen value* sistem tersebut berada pada bagian negatip bidang kompleks.

Dengan dekomposisi pada bagian II.4., maka sistem dikatakan stabil jika dan hanya jika semua *strongly coupled system*-nya stabil,

Contoh 3.1.:

Dari sistem pada contoh 2.1., apabila tiap subsistem adalah orde 1 dengan konstanta waktu (T) untuk tiap subsistem adalah 1, 0.5, 0.2, 0.2, 0.2, 1, 0.5, 1, 1, dan dengan dekomposisi seperti pada contoh 2.4., tentukan persamaan sistem tiap strongly coupled system., dan tentukan juga persamaan keseluruhan sistem model input-output.

Penyelesaian:

Dengan konstanta waktu di atas, maka didaptkan persamaan sistem untuk tiap *strongly coupled system* sebagai berikut:

SCS I (level 4)

$\dot{x}_1 = -x_1 + u_1$

$y_1 = x_1$

SCS 2 (level 3)

$\dot{x}_2 = -2x_2 + 2u_2$

$y_2 = x_2$

SCS 3 (level 2)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

SCS 4 (level 1)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_8 \\ y_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_8 \\ x_9 \end{pmatrix}$$

(3.2)

Sedangkan persamaan keseluruhan sistem model input-output adalah:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix}$$

(3.3)

Contoh 3.2.:

Dari sistem pada contoh 3.1., tentukan kestabilan sistemnya.

Penyelesaian:

Eigen value masing-masing *strongly coupled system* adalah sebagai berikut:

SCS1, mempunyai *eigen value* pada $\lambda_1 = -1$

SCS2, mempunyai *eigen value* pada $\lambda_2 = -2$

SCS3, mempunyai *eigen value* pada $\lambda_3 = -4.1232$; $\lambda_4 = -5{,}239$; $\lambda_5 = -6.1325$;

$\lambda_6 = -2.4371$; $\lambda_7 = -0.0681$

SCS4, mempunyai *eigen value* pada $\lambda_8 = -2$; $\lambda_9 = 0$

Terdapat satu *eigen value*, yaitu λ_9 yang bernilai 0, sehingga SCS4 tidak stabil, yang mengakibatkan sistem tidak stabil.

Sistem yang tidak stabil dapat distabilkan dengan menggunakan pengendalian terdesentralisasi dengan syarat sistem tersebut tidak memiliki *fixed mode* terdesentralisasi.

III.2. KESTABILAN TERKONEKSI

Hal penting dalam sistem skala besar adalah gangguan yang terjadi dalam strukturnya, baik secara intensif oleh desain maupun tidak intensif oleh kesalahan. Jadi hal yang mendasar adalah pengaruh gangguan sistem terhadap sistem. Kestabilan terkoneksi diperlukan untuk mengetahui stabil tidaknya hubungan antar sub sistem di dalam suatu sistem skala besar.

Jika diketahui sub sistem:

$$\dot{x}_i = A_i x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} E_i x_i \text{, di mana } i=1, \ldots, N \tag{3.4}$$

dengan asumsi, tiap subsistem

$$\dot{x}_i = A_i\, x_i \tag{3.5}$$

stabil. Dengan memilih matriks H yang semi definit positip, maka matriks positif definit P bisa diperoleh dengan menggunakan persamaan Lyapunov

$$A_i^{\,T} P_i + P_i A_i + H_i = 0 \tag{3.6}$$

Fungsi $\nu_i(x_i) = \left(x_i^{\,T} P_i x_i\right)^{1/2}$ adalah fungsi Lyapunov yang memenuhi persamaan

$$\lambda_m^{1/2}(P_i)\|x_i\| \le \nu_i(x_i) \le \lambda_M^{1/2}(P_i)\|x_i\| \tag{3.7}$$

di mana λ_m dan λ_M adalah *eigen value* minimum dan maksimum. Fungsi Lyapunov adalah fungsi Lipschitz dengan persamaan:

$$|\,\nu_i(x_i) - \nu_i(y_i)\,| \le L_i \,\|\, x_i - y_i \,\| \tag{3.8}$$

Konstanta Lipschitz pada persamaan 3.8 di atas adalah

$$L_i = \frac{\lambda_M^{\;1/2}(P_i)}{\lambda_m^{\;1/2}(P_i)} \tag{3.9}$$

dan intekoneksinya memenuhi persamaan

$$\|\, a_{ij} x_i \,\| \le \zeta_{ij} \left\|\, x_j \,\right\| \tag{3.10}$$

sehingga,

$$\zeta_{ij} = \lambda_M^{\;1/2}\left(a_{ij}^{\;T} * a_{ij}\right) \tag{3.11}$$

Matriks S mempunyai elemen:

$$s_{ij} = \begin{Bmatrix} -1 & ,i = j \\ 2L_i \lambda_M^{\;1/2}(P_j)\lambda_m^{\;-1}(H_j)\zeta_{ij} & ,i \ne j \end{Bmatrix} \tag{3.12}$$

Kriteria untuk menyatakan suatu sistem adalah stabil terkoneksi diperkenalkan oleh $\tilde{S}$iljak (1978). $\tilde{S}$iljak menyatakan bahwa suatu sistem stabil terkoneksi adalah jika dan hanya jika *quasi-dominancy*,

$$(-1)^k \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1k} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{k1} & s_{k2} & \cdots & s_{kk} \end{vmatrix} > 0 \qquad (3.13)$$

untuk k = 1, 2, …, N

Contoh 3.3.:

Dari sistem pada contoh 3.1., tentukan kestabilan terkoneksinya jika diberikan matriks H = diag(1,2,1,1,1,2,1,2,1).

Penyelesaian:

Dengan menggunakan persamaan Lyapunov (3.6) diperoleh P_i yang merupakan matriks diagonal. Elemen-elemen matriks P_i adalah sebagai berikut:

$$\begin{array}{lll} P_1=0.5, & P_2=0.5, & P_3=0.1, \\ P_4=0.1, & P_5=0.1, & P_6=1, \\ P_7=0.25, & P_8=1, & P_9=0.5 \end{array} \qquad (3.14)$$

Karena tiap sub sistem adalah orde satu, maka *eigen value* dari matriks P_i, yaitu $\lambda(P_i)$ mempunyai nilai yang sama dengan P_i. *Eigen value* P_i yang diperoleh adalah sebagai berikut:

$$\begin{array}{lll} \lambda(P_1)=0.5, & \lambda(P_2)=0.5, & \lambda(P_3)=0.1, \\ \lambda(P_4)=0.1, & \lambda(P_5)=0.1, & \lambda(P_6)=1, \\ \lambda(P_7)=0.25, & \lambda(P_8)=1, & \lambda(P_9)=0.5 \end{array} \qquad (3.15)$$

L_i diperoleh dari persamaan konstanta Lipschitz (Persamaan 3.9). Dari perhitungan diperoleh:

$$L_1=0.7071,\quad L_2=0.7071,\quad L_3=0.3162,$$
$$L_4=0.3162,\quad L_5=0.3162,\quad L_6=1, \tag{3.16}$$
$$L_7=0.5,\quad L_8=1,\quad L_9=0.7071$$

ζ_{ij} diperoleh dengan menggunakan persamaan 3.11. ζ_{ij} yang diperoleh adalah:

$\zeta_{21} = \lambda_M^{1/2} (G_{21}^T * G_{21}) \rightarrow \zeta_{21} = \lambda_M^{1/2}((1)*(1)) \rightarrow \zeta_{21} = \lambda_M^{1/2}(1) \rightarrow \zeta_{21} = 1$

$\zeta_{32} = \lambda_M^{1/2} (G_{32}^T * G_{32}) \rightarrow \zeta_{32} = \lambda_M^{1/2}((1)*(1)) \rightarrow \zeta_{32} = \lambda_M^{1/2}(1) \rightarrow \zeta_{32} = 1$

$\zeta_{34} = \lambda_M^{1/2} (G_{34}^T * G_{34}) \rightarrow \zeta_{34} = \lambda_M^{1/2}((1)*(1)) \rightarrow \zeta_{34} = \lambda_M^{1/2}(1) \rightarrow \zeta_{34} = 1$

$\zeta_{43} = \lambda_M^{1/2} (G_{43}^T * G_{43}) \rightarrow \zeta_{43} = \lambda_M^{1/2}((1)*(1)) \rightarrow \zeta_{43} = \lambda_M^{1/2}(1) \rightarrow \zeta_{43} = 1$

$\zeta_{46} = \lambda_M^{1/2} (G_{46}^T * G_{46}) \rightarrow \zeta_{46} = \lambda_M^{1/2}((1)*(1)) \rightarrow \zeta_{46} = \lambda_M^{1/2}(1) \rightarrow \zeta_{46} = 1$

$\zeta_{56} = \lambda_M^{1/2} (G_{56}^T * G_{56}) \rightarrow \zeta_{56} = \lambda_M^{1/2}((1)*(1)) \rightarrow \zeta_{56} = \lambda_M^{1/2}(1) \rightarrow \zeta_{56} = 1$

$\zeta_{64} = \lambda_M^{1/2} (G_{64}^T * G_{64}) \rightarrow \zeta_{64} = \lambda_M^{1/2}((1)*(1)) \rightarrow \zeta_{64} = \lambda_M^{1/2}(1) \rightarrow \zeta_{64} = 1$

$\zeta_{65} = \lambda_M^{1/2} (G_{65}^T * G_{65}) \rightarrow \zeta_{65} = \lambda_M^{1/2}((1)*(1)) \rightarrow \zeta_{65} = \lambda_M^{1/2}(1) \rightarrow \zeta_{65} = 1$

$\zeta_{67} = \lambda_M^{1/2} (G_{67}^T * G_{67}) \rightarrow \zeta_{67} = \lambda_M^{1/2}((1)*(1)) \rightarrow \zeta_{67} = \lambda_M^{1/2}(1) \rightarrow \zeta_{67} = 1$

$\zeta_{76}= \lambda_M^{1/2} (G_{76}^T * G_{76}) \rightarrow \zeta_{76} = \lambda_M^{1/2}((1)*(1)) \rightarrow \zeta_{76} = \lambda_M^{1/2}(1) \rightarrow \zeta_{76} = 1$

$\zeta_{78} = \lambda_M^{1/2} (G_{78}^T * G_{78}) \rightarrow \zeta_{78} = \lambda_M^{1/2}((1)*(1)) \rightarrow \zeta_{78} = \lambda_M^{1/2}(1) \rightarrow \zeta_{78} = 1$

$\zeta_{79} = \lambda_M^{1/2} (G_{79}^T * G_{79}) \rightarrow \zeta_{79} = \lambda_M^{1/2}((1)*(1)) \rightarrow \zeta_{79} = \lambda_M^{1/2}(1) \rightarrow \zeta_{79} = 1$

$\zeta_{89} = \lambda_M^{1/2} (G_{89}^T * G_{89}) \rightarrow \zeta_{89} = \lambda_M^{1/2}((1)*(1)) \rightarrow \zeta_{89} = \lambda_M^{1/2}(1) \rightarrow \zeta_{89} = 1$

$\zeta_{98} = \lambda_M^{1/2} (G_{98}^T * G_{98}) \rightarrow \zeta_{98} = \lambda_M^{1/2}((1)*(1)) \rightarrow \zeta_{98} = \lambda_M^{1/2}(1) \rightarrow \zeta_{98} = 1$

(3.17)

Elemen-elemen matriks S diperoleh dari persamaan 3.12. Elemen-elemennya adalah sebagai berikut:

$S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = S_{55} = S_{66} = S_{77} = S_{88} = S_{99} = -1$

$S_{21} = 2\ L_2\ \lambda_M^{1/2}(P_1)\ \lambda_m^{-1}(Q_1)\ \zeta_{21} = 2\ \ 0.7071\ 0.7071\ 1\ 1 = 1$

Dengan cara yang sama dengan cara mendapatkan S_{21}, diperoleh S_{32}, S_{34}, S_{43}, S_{46}, S_{56}, S_{64}, S_{65}, S_{67}, S_{76}, S_{78}, S_{79}, S_{89}, S_{98}, sehingga

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & -1 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & -1 & 0 & 0.3162 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0.3162 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6325I & 0.6325 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1.4142 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7071 & 0.7071 & -1 \end{pmatrix} \qquad (3.18)$$

Quasy dominancy matriks S di atas adalah sebagai berikut:

k=1 → $(-1)^1 \left| -1 \right| = 1 > 0$

k=2 → $(-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0$

k=3 → $(-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0.1 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0$

k=4 → $(-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & -1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.2 & -1 \end{vmatrix} = 0.96 > 0$

k=5 → $(-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & -1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.96 > 0$

k=6 → $(-1)^6 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & -1 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & -1 & 0 & 0.3162 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0.3162 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6325 & 0.6325 & -1 \end{vmatrix} = 0.568 > 0$

k=7 → $(-1)^7 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & -1 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & -1 & 0 & 0.3162 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0.3162 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6325 & 0.6325 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 \end{vmatrix} = 0.088 > 0$

k=8 → $(-1)^8 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & -1 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & -1 & 0 & 0.3162 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0.3162 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6325 & 0.6325 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.088 > 0$

k=9 → $(-1)^9 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & -1 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & -1 & 0 & 0.3162 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0.3162 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6325 & 0.6325 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1.4142 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7071 & 0.7071 & -1 \end{vmatrix} = 1.688.10^{-3} > 0$

(3.19)

Dari perhitungan di atas, maka terlihat *quasy dominancy* matriks S di atas positip. Karena sistem stabil terkoneksi jika *quasy dominancy* positip, maka sistem di atas adalah stabil terkoneksi.