BAB IV

PENGENDALIAN TERDESENTRALISASI

Untuk menstabilkan sistem yang tidak stabil, dengan syarat sistem tersebut tidak mempunyai *fixed mode* terdesentralisasi, dapat dilakukan dengan memberikan kompensator terdesentralisasi. *Fixed mode* terdesentralisasi pertama kali diperkenalkan oleh Wang dan Davison (1973) yang memberikan syarat perlu dan syarat cukup untuk kestabilan sistem tedesentralisasi. Karakteristik *fixed mode* pada pengendalian terdesentralisasi dipresentasikan kemudian pada Corfmat dan Morse (1976), Andersen dan Clements (1981), Andersen (1982), Vidyasagar dan Viswanadham (1982), Davison dan Ozgüner (1983) dan Tarokh dan jamshidi (1987). Ada dua macam kompensator yang dapat digunakan, yaitu kompensator terdesentralisasi statis, dan kompensator terdesentralisasi dinamis. Kompensator statis diperkenalkan oleh Corfmat dan Morse (1976a dan 1976b) sebagai hasil dari penyelidikan kestabilan terdesentralisasi, sedangkan kompensator dinamik diperkenalkan oleh Brasch dan Pearson (1970) dan Jamshidi (1983) yang menggunakan umpan balik output.

Prinsip desain pengendali umpanbalik dengan memberikan suatu *eigen value* tertentu untuk sistem loop tertutup dengan tujuan menstabilkan sistem tertentu yang tidak stabil adalah sama dengan teori pengendalian multivariabel.

Untuk menstabilkan suatu sistem tertentu yang tidak stabil, maka *eigen value* sistem harus diubah ke tempat tertentu di bagian negatip bidang kompleksnya. Bila terdapat syarat tambahan pada sifat I/O maka syarat ini harus diformulasikan sebelumnya sebagai batasan nilai *eigen value* sistem loop tertutup tersebut, dan berguna untuk menemukan pengendali umpanbalik yang dapat merubah *eigen value* sesuai yang diinginkan.

IV.1. FIXED MODE TERDESENTRALISASI

Syarat perlu dan syarat cukup untuk *eigen value* (λ) menjadi *fixed mode* terdesentralisasi dijelaskan oleh Wang dan Davison (1973), yaitu adanya *disjoint* partisi D, H dari suatu himpunan I, yaitu

$$D = [i_1, i_2, \ldots, i_k] \qquad H = [i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_N] \tag{4.1}$$

di mana,

$$B_D = (B_1\ B_2 \ldots\ B_k) \quad \text{dan} \quad C_H = \begin{pmatrix} C_{k+1} \\ C_{k+2} \\ \vdots \\ C_N \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

sehingga

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A - \lambda I & B_D \\ C_H & 0 \end{pmatrix} < n \tag{4.3}$$

di mana n = banyaknya state

Jadi sistem dikatakan mempunyai *fixed mode* terdesentralisasi jika dan hanya jika rank pada persamaan 4.3 dipenuhi.

Contoh 4.1.:

Tentukan *fixed mode* terdesentralisasi dari sistem pada contoh 2.1., dengan dekomposisi pada contoh 2.4.

Penyelesaian:

Dengan mengaplikasikan persamaan 4.2. pada persamaan dekomposisi sistem (persamaan 2.24) diperoleh:

$$B_D = (B_{SCS1}\ B_{SCS2}) \quad \text{dan} \quad C_H = \begin{pmatrix} C_{SCS3} \\ C_{SCS4} \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan persamaan 4.3., jika D={1} dan H={3} diperoleh:

$$\text{Rank}\begin{pmatrix} A-\lambda I & B_D \\ C_H & 0 \end{pmatrix} = \text{Rank}\begin{pmatrix} A_{SCS1} & 0 & 0 & 0 & B_{SCS1} \\ 1 & A_{SCS2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A_{SCS3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & A_{SCS4} & 0 \\ 0 & 0 & C_{SCS3} & 0 & 0 \end{pmatrix} = 5$$

Dengan cara yang sama, jika D={1} dan H={4} diperoleh:

$$\text{Rank}\begin{pmatrix} A-\lambda I & B_D \\ C_H & 0 \end{pmatrix} = \text{Rank}\begin{pmatrix} A_{SCS1} & 0 & 0 & 0 & B_{SCS1} \\ 1 & A_{SCS2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A_{SCS3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & A_{SCS4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{SCS4} & 0 \end{pmatrix} = 5$$

Demikian juga untuk D={2} dengan H={3} dan H={4} mempunyai rank = 5 yang berarti lebih besar daripada banyaknya state. Secara teori jika rank diatas lebih besar atau sama dengan banyaknya state (n), maka sistem tidak memiliki *fixed mode* terdesentralisasi.

Apabila sistem diatas tidak stabil, yaitu ada *eigen value* yang berharga positip atau nol, maka sistem tersebut dapat distabilkan oleh kompensator terdesentralisasi dengan menggunakan kompensator statis maupun dinamik.

IV.2. KOMPENSATOR TERDESENTRALISASI STATIS

Plant yang diberikan oleh model orientasi I/O adalah sebagai berikut:

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^{N} B_i u_i$$

$$y_i = C_i x \tag{4.4}$$

Tujuannya adalah untuk menstabilkan sistem dan memberikan himpunan *eigen value* σ_o tertentu pada sistem loop tertutup tersebut. Pada metode yang akan disajikan disini, pengendali terdesentralisasi harus terdiri dari N-1 umpanbalik output statis.

Stasiun pengendali statis yang diinginkan adalah:

$$u_i = -K_i y_i \tag{4.5}$$

Stasiun pengendalian statis tersebut harus dipilih sedemikian rupa sehingga sistem loop tertutup 4.4 dan 4.5 menjadi

$$\dot{x} = \left(A - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N} B_i K_i C_i \right) x + B_k u_k$$

$$y = C_k x \tag{4.6}$$

yang *controllable* melalui u_k dan *observable* melalui y_k. Stasiun pengendalian 4.5 digunakan untuk menstabilkan sistem 4.4 dengan cara memindahkan posisi *eigen* *value* tersebut pada bagian negatip bidang kompleks. Metode desain ini tidak tercapai jika terdapat *fixed mode* terdesentralisasi (Jamshidi, 1997).

Jadi, untuk menstabilkan sistem yang tidak stabil, dengan syarat sistem tersebut tidak mempunyai *fixed mode* terdesentralisasi, maka bisa dicari kompensator statis K sehingga sistem memberikan *eigen value* pada bagian negatip bidang kompleks sesuai dengan himpunan *eigen value* σ_o yang diinginkan.

<u>Contoh 4.2.:</u>

Dari analisa kestabilan pada contoh 3.2., diketahui sistem pada contoh 3.1. tidak stabil karena SCS4 tidak stabil dan dari contoh 4.1. diketahui bahwa sistem tidak memiliki *fixed mode* terdesentralisasi. Menurut teori di atas, sistem dapat distabilkan dengan memberikan kompensator terdesentralisasi statis pada sistem. Dapatkan kompensator terdesentralisasi statis tersebut jika diinginkan spektrum σ_0={-1,,-3}.

<u>Penyelesaian:</u>

Kompensator tersebut berupa umpan balik dari y_8 ke u_8 dan dari y_9 ke u_9.

$u_8 = -K_8\, y_8$

$$u_9 = -K_9\, y_9 \tag{4.7}$$

sehingga

$$A - BKC = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_8 & 0 \\ 0 & K_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - BKC = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_8 & 0 \\ 0 & K_9 \end{pmatrix}$$

$$A - BKC = \begin{pmatrix} -1 - K_8 & 1 \\ 1 & -1 - K_9 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Eigen value dicari dari persamaan $\left|\lambda I - (A - BKC)\right| = 0$, sehingga diperoleh

$$\begin{vmatrix} \lambda - (-1 - K_8) & -1 \\ -1 & \lambda - (-1 - K_9) \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (-1 - K_9)\lambda - (-1 - K_8)\lambda + (-1 - K_8)(-1 - K_9) - 1 = 0$$

$$\lambda^2 + (2 + K_8 + K_9)\lambda + (K_8 + K_9 + K_8K_9) = 0 \tag{4.9}$$

Jika diinginkan spektrum loop tertutup σ_0={-1,-3}, diperoleh persamaan:

$$2 + K_8 + K_9 = 4 \tag{4.10}$$

$$K_8 + K_9 + K_8K_9 = 3 \tag{4.11}$$

Dengan mensubstusi K_9 pada persamaan 4.11 dengan menggunakan persamaan 4.10 ($K_9 = (2-K_8)$), diperoleh persamaan:

$$K_8 + (2-K_8) + K_8\,(2-K_8) = 3 \tag{4.12}$$

$$K_8^2 - 2\,K_8 + 1 = 0 \tag{4.13}$$

Dari persamaan 4.13, dapat dicari K_8, diperoleh:

$K_8 = 1$ untuk kedua akarnya (4.14)

K_9 dapat dihitung dengan memasukkan persamaan 4.14 kedalam persamaan 4.10, diperoleh:

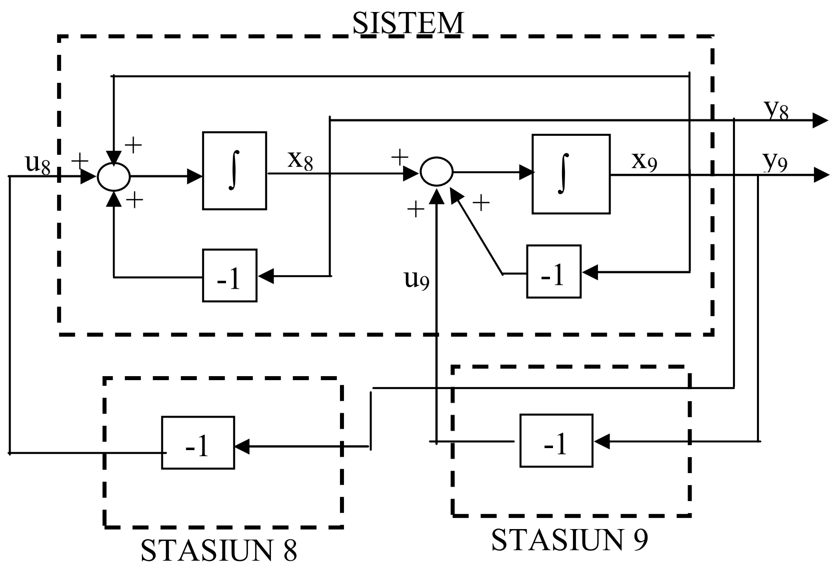
$K_9 = 1$ untuk kedua akarnya (4.15)

Sesuai dengan spektrum yang diinginkan σ_0={-1,,-3}, maka diperoleh kompensator statis $K_8 = 1$ dan $K_9 = 1$, sehingga aksi kendalinya adalah

$u_8 = -1\ y_8$

$u_9 = -1\ y_9$ (4.16)

Diagram blok SCS4 setelah ditambah dengan kompensator terdesentralisasi statis terdapat pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1. Diagram Blok SCS4 dengan Kompensator Terdesentralisasi Statis

Dari pembahasan ini, diperoleh gain kompensator K_8 dan K_9. Gain kompensator ini jika dipasang pada stasiun kendali 8 dan stasiun kendali 9 sesuai dengan Gambar 4.1, maka SCS4 menjadi stabil dan menyebabkan sistem stabil.

IV.3. KOMPENSATOR TERDESENTRALISASI DINAMIK

Dari bagian IV.2. telah dijelaskan bahwa semua *eigen value* plant sistem

$\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx$ (4.17)

dapat diubah dengan kompensator terdesentralisais statis

$u = -K_y y$ (4.18)

jika dan hanya jika sistem tidak mempunyai *fixed mode* terdesentralisasi, dengan asumsi bahwa semua *eigen value*-nya dapat dipindah (*movable)*.

Tetapi, kompensator terdesentralisais statis pada umumnya tidak dapat memindahkan semua *eigen value*. Sedangkan kestabilan mensyaratkan pemindahan secara serentak semua *eigen value* ke bagian negatip bidang kompleks.

Permasalahan ini dapat diselesaikan dengan kompensator terdesentralisasi dinamik.

Pada pengendalian sentralisasi, kompensasi dinamik telah dikembangkan sebagai alternatif untuk merealisasikan state pengendali umpanbalik melalui observer.

Dari plant:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y_i = Cx \tag{4.19}$$

terbentuk plant baru,

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\bar{x} + \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\bar{u}$$

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\bar{x} \tag{4.20}$$

yang digunakan untuk mendesain pengendali umpanbalik output

$$\bar{u} = -\bar{K}\,\bar{y} \tag{4.21}$$

sehingga sistem loop tertutup 4.20 dan 4.21 mempunyai eigenvalue $n + n_r$. Secara umum, tidak ada umpan balik output u = -Ky yang dapat ditemukan bagi plant

4.19 untuk memindahkan semua eigenvalue loop tertutup. Perluasan umpanbalik output 4.21 dapat dicari jika jumlah n_r dari integrator cukup besar.

Batas atas n_r adalah nilai minimal dari indeks *controllability* n_c dan indeks *observability* n_o, yang didefinisikan sebagai bilangan integer terkecil di mana

$\text{rank}(B \;\; AB \; \ldots \;\; A^{nc-1}B) = n_c$

atau

$\text{rank}(C' \;\; A'C' \; \ldots \;\; A^{no-1}C') = n_o$

terpenuhi, sehingga

$$n_r = \min(n_c, n_o) \tag{4.22}$$

Syarat perlu agar kompensator terdesentralisasi dinamik bisa digunakan adalah sistem linear 4.19 harus *controllable* dan *observable*.

Sistem loop tertutup 4.20 dan 4.21 dengan

$$\overline{K} = \begin{pmatrix} -K_y & -K_x \\ G & F \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

adalah ekivalen dengan loop tertutup yang ada pada plant asli (persamaan 4.19) dengan pengendali

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= Fx_r + Gy \\ u &= -K_x x_r - K_y y \end{aligned} \tag{4.24}$$

Algoritma penyelesaian kompensator terdesentralisasi dinamik dengan sistem pada persamaan 2.19 dan diinginkan himpunan *eigen value* σ_o adalah:

1. Dari persamaan 4.22, diperoleh n_r
2. Plant pada persamaan 4.19 dikembangkan seperti yang dideskripsikan pada persamaan 4.20

3. Matriks pengendali $\overline{K}$ dicari sehingga himpunan eigenvalue σ_o dari sistem loop tertutup tersebut sesuai yang diinginkan.

Contoh 4.3.:

Carilah kompensator terdesentralisasi dinamik dari sistem yang tidak stabil pada contoh 3.1., jika spektrum yang diinginkan adalah $\sigma_0=\{-1,-3,-4\}$.

Penyelesaian:

Karena rank(B) = n, maka n_c (*index controllability*) = 1, juga rank(C) = n, sehingga n_o (*index observability*) = 1, sehingga diperoleh $n_r = \min(n_c,n_o) = 1$. Karena $n_r=1$, diperoleh matriks K yaitu matriks yang digunakan sebagai kompensator terdesentralisasi dinamik. Matriks K yang diperoleh adalah

$$K_1 = \begin{pmatrix} -k_{y1} & 0 & -k_{x1} \\ 0 & -k_{y2} & 0 \\ g_1 & 0 & f_1 \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

di mana k_{y1}, k_{y2}, k_{x1}, g_1 dan f_1 tidak diketahui dan angka 1 pada K menunjukkan $n_r=1$.

Matrix loop tertutup A+BKC, yaitu $A_1+B_1K_1C_1$ adalah

$$A_1 + B_1K_1C_1 = \begin{pmatrix} -1-k_{y1} & 1 & -k_{x1} \\ 1 & -1-k_{y2} & 0 \\ g_1 & 0 & f_1 \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

Persamaan karakteristik polinomialnya adalah:

$$\left|\lambda I - (A_1 - B_1K_1C_1)\right| = \begin{vmatrix} \lambda - (1+k_{y1}) & -1 & k_{x1} \\ -1 & \lambda - (1+k_{y2}) & 0 \\ -g_1 & 0 & \lambda - f_1 \end{vmatrix} \tag{4.27}$$

Spektrum loop tertutup yang diinginkan σ_0={-1,-3,-4}, maka parameter kendali yang diinginkan dapat dicari.

Untuk menyelesaikan ini, dengan mempertimbangkan matrix identitas berikut:

$$\det\begin{bmatrix} M_1 & M_{12} \\ M_{21} & M_2 \end{bmatrix} = \det(M_1)\,.\,\det\left(M_2 - M_{21}M_1^{-1}M_{12}\right) \tag{4.28}$$

dan diaplikasikan ke matrix persamaan 4.27, diperoleh

$$\left|\lambda I - (A_1 - B_1K_1C_1)\right| = \begin{vmatrix} \lambda-(1+k_{y1}) & -1 \\ -1 & \lambda-(1+k_{y2}) \end{vmatrix}\,.$$

$$\left|(\lambda - f_1) - (-g_1 \quad 0)\begin{pmatrix} \lambda-(1+k_{y1}) & -1 \\ -1 & \lambda-(1+k_{y2}) \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} k_{x1} \\ 0 \end{pmatrix}\right| \tag{4.29}$$

k_{y1} dan k_{y2} dipilih sehingga dua pole pertama (-1;-3) ditempatkan dengan tepat.

Untuk $\begin{vmatrix} \lambda-(1+k_{y1}) & -1 \\ -1 & \lambda-(1+k_{y2}) \end{vmatrix} = 0$, diperoleh $k_{y1} = -3$ dan $k_{y2} = -3$ (4.30)

Untuk

$$\left|(\lambda - f_1) - (-g_1 \quad 0)\begin{pmatrix} \lambda-(1+k_{y1}) & -1 \\ -1 & \lambda-(1+k_{y2}) \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} k_{x1} \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 0, \tag{4.31}$$

$$\left|(\lambda - f_1) - (-g_1 \quad 0)\begin{pmatrix} \lambda+2 & -1 \\ -1 & \lambda+2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} k_{x1} \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 0 \tag{4.32}$$

$$\left|(\lambda - f_1) - (-g_1 \quad 0)\,\frac{1}{\lambda^2+4\lambda+3}\begin{pmatrix} \lambda+2 & 1 \\ 1 & \lambda+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_{x1} \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 0 \tag{4.33}$$

dengan memasukkan pole ketiga (λ = -4), maka persamaan menjadi:

$$\left|\left((\lambda - f_1) + \frac{g_1(\lambda+2)k_{x1}}{\lambda^2+4\lambda+3}\right)_{\lambda=-4}\right| = 0 \tag{4.34}$$

$$\left|\left((-4-f_1)+\frac{g_1(-2)k_{x1}}{16-16+3}\right)\right|=0 \tag{4.35}$$

$$\left|\left((-4-f_1)+\frac{g_1(-2)k_{x1}}{3}\right)\right|=0 \tag{4.36}$$

jika dibuat g_1 =1 dan k_{x1} = 1, diperoleh

$$f_1 = -4.67 \tag{4.37}$$

Kompensator terdesentralisasi dinamik mempunyai parameter kendali:

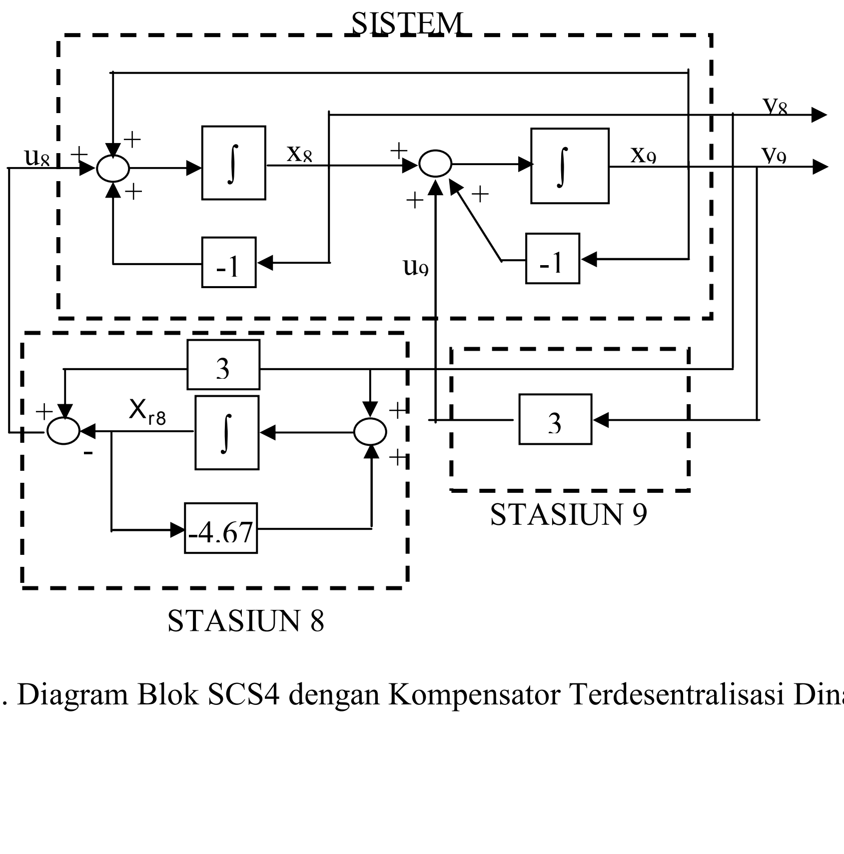
$$g_1 = 1,\ k_{x1} = 1,\ k_{y1} = -3,\ k_{y2} = -3 \text{ dan } f_1 = -4.67 \tag{4.38}$$

Persamaan kompensator terdesentralisasi dinamiknya adalah sebagai berikut:

$\dot{x}_{r8} = -4.67\ x_{r8} + y_8$

$u_8 = -x_{r8} + 3\ y_8$

$u_9 = 3\ y_9$



Gambar 4.2. Diagram Blok SCS4 dengan Kompensator Terdesentralisasi Dinamik

Diagram blok sistem dengan kompensator terdesentralisasi dinamik terdapat pada Gambar 4.2.

Dari pembahasan ini, diperoleh parameter kendali, yaitu g_1, k_{x1}, k_{y1}, k_{y2} dan f_1. Jika paramter kendali ini ditambahkan pada stasiun kendali 8 dan stasiun kendali 9 sesuai Gambar 4.2, maka SCS4 menjadi stabil dan menyebabkan sistem stabil.