BAB V

OPTIMASI SISTEM

Dalam sistem pengendalian berhirarki 2 level, maka optimasi dapat dilakukan pada level pertama yaitu pengambil keputusan level pertama yang langsung berhubungan dengan proses dan level kedua yang mengkoordinasikan beberapa pengambil keputusan pada level pertama. Pada sistem pengendalian berhirarki optimasi level pertama menggunakan *Linear Quadratic Regulator* (LQR), sedangkan pada level kedua digunakan metode *interaction prediction* untuk memberikan nilai baru pada α dan m sehingga error interaksi semakin kecil sampai batas yang diinginkan. Metode penyelesaian LQR diberikan oleh Davison, dan Maki (1973) dan Jamshidi (1980), sedangkan metode *interaction prediction* diberikan oleh Takahara (1965).

V.1. OPTIMASI LEVEL PERTAMA

Jika diketahui suatu sistem dinamik:

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (5.1)$$

di mana A dan B adalah kontinyu dan mempunyai indeks performansi (*cost function*):

$$J[x(t_0), u(t_0), t_0] = \int_{to}^{tf} \left[u^T R(t) u + x^T Q(t) x\right] dt + x^T(t_f) F x(t_f) \qquad (5.2)$$

di mana matriks Q(t) dan R(t) kontinyu, simetrik dan definit non negatif atau definit positif dan F adalah matriks definit non negatif. Permasalahan pengendalian optimal adalah menemukan fungsi pengendalian $u^*(t)$, di mana $t_0 \leq t \leq t_f$, yang memenuhi sistem dinamik di atas dengan meminimasi indeks performansi.

Jika diasumsikan t_f finite, maka indeks performansi $J^*(x(t),t)$ menjadi

$$J^*[x(t),t] = x^T(t)\, K(t)\, x(t) \qquad (5.3)$$

di mana K(t) adalah matriks simetrik. Jika K(t) tidak simetrik, dapat diganti dengan matriks simetrik ½ $[K(t) + K^T(t)]$ tanpa mengubah indeks performansi.

Persamaan Hamilton-Jacobi digunakan untuk memperoleh aksi pengendalian optimal. Bentuk pertama dari persamaan Hamilton-Jacobi adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial J^*}{\partial t}[x(t), t] = -\min_{u(t)}\left\{L[x(t), u(t), t] + \left[\frac{\partial J^*}{\partial x}[x(t), t]\right]^T f[x(t), u(t), t]\right\} \qquad (5.4)$$

Dengan mensubstitusi persamaan-persamaan di atas diperoleh:

$$x^T \dot{K} x = -\min\left(u^T R u + x^T Q x + 2x^T K A x + 2x^T K B u\right) \qquad (5.5)$$

Dengan menggunakan identitas:

$$u^T R u + x^T Q x + 2x^T K A x + 2x^T K B u = x^T\left(Q - KBR^{-1}B^T K + KA + A^T K\right)x \qquad (5.6)$$

diperoleh

$$x^T \dot{K} x = -x^T\left(Q - KBR^{-1}B^T K + KA + A^T K\right)x \qquad (5.7)$$

Kedua sisi persamaan adalah simetrik, sehingga

$$\dot{K}(t) = K(t)A(t) + A^T(t)\,K(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) + Q(t) \qquad (5.8)$$

Persamaan ini dikenal sebagai *Differential Matriks Riccati Equation* (DMRE). Jika $\dot{K}(t)$ = 0, diperoleh *Algebraic Matriks Riccati Equation* (AMRE).

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan:

1. Aksi pengendalian optimal diberikan oleh Kalman (1960), yaitu:

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t) = -G(t)x(t) \qquad (5.9)$$

   di mana K(t) adalah solusi AMRE dan

$$G(t) = R^{-1}(t)B^T(t)K(t) \qquad (5.10)$$

   Dari persamaan di atas, diperoleh sistem pengendalian optimal loop tertutup adalah:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \left[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)\right]x(t) \\ &= \left[A(t) - S(t)K(t)\right]x(t) \\ &= \left[A(t) - B(t)G(t)\right]x(t)\end{aligned} \qquad (5.11)$$

2. Dengan menggunakan solusi AMRE, nilai sub optimal dari indeks performansi diberikan oleh

$$J^*\left[x(t_0),(t_0)\right] = x^T(t_0)K(t)x(t_0) \qquad (5.12)$$

   K(t) adalah matriks simetrik positif definit.

<u>Contoh 5.1.:</u>

Dari sistem pada contoh 3.1., tentukan aksi kendali optimal level pertama dengan menggunakan LQR dan nilai sub optimalnya jika diketahui $t_0 = 0$ dan $t_f = 10$, dan diberikan Q=diag(1,2,1,1,1,2,1,2,1) dan R=diag(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1), sedangkan state awalnya adalah $x(0) = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)^T$

Penyelesaian:

Mengacu pada persamaan 5.2 dan dengan $t_0 = 0$ dan $t_f = 10$, maka indeks performansi sistem adalah:

$$J = \int_0^{10} \left[u^T(t)Ru(t) + x^T(t)Qx(t)\right]dt + x^T(t_f)Fx(t_f) \tag{5.14}$$

Permasalahan pengendalian optimal adalah mencari aksi kendali optimal u*(t) dan nilai optimal indeks performansi sistem dengan meminimasi indeks performansi. Penyelesaian permasalahan ini dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Sesuai dengan persamaan 5.9. – 5.10., maka aksi kendali optimal adalah

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t) \tag{5.15}$$

Mengacu pada persamaan 5.11, sistem optimal loop tertutup adalah

$$\dot{x}(t) = \left[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)\right]x(t)$$

$$\dot{x}(t) = \left[A(t) - B(t)G(t)\right]x(t) \tag{5.18}$$

2. $K(t_f)$ dan $G(t_f)$ diperoleh dengan menggunakan fungsi LQR pada Matlab.

Dari perhitungan menggunakan Matlab, diperoleh $K(t_f)$ dan $G(t_f)$, yaitu

$$K = \begin{pmatrix} 0.4584 & 0.0746 & 0.0007 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0746 & 0.3673 & 0.0081 & 0.0018 & 0.0001 & 0.0008 & 0.0001 & -0.0001 & -0.0001 \\ 0.0007 & 0.0081 & 0.0843 & 0.0129 & 0.0011 & 0.0085 & 0.0021 & -0.0004 & -0.0003 \\ 0.0002 & 0.0018 & 0.0129 & 0.0964 & 0.0121 & 0.0948 & 0.0253 & -0.0013 & -0.0011 \\ 0 & 0.0001 & 0.0011 & 0.0121 & 0.0949 & 0.0943 & 0.0252 & -0.0013 & -0.0010 \\ 0 & 0.0008 & 0.0085 & 0.0948 & 0.0943 & 0.7812 & 0.2103 & 0.0143 & 0.0137 \\ 0 & 0.0001 & 0.0021 & 0.0253 & 0.0252 & 0.2103 & 0.3874 & 0.2458 & 0.2093 \\ 0 & -0.0001 & -0.0004 & -0.0013 & -0.0013 & 0.0143 & 0.2458 & 0.8249 & 0.3460 \\ 0 & -0.0001 & -0.0003 & -0.0011 & -0.0010 & 0.0137 & 0.2093 & 0.3460 & 0.5482 \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

dan

$$G = \begin{pmatrix} 0.4584 & 0.0746 & 0.0007 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1493 & 0.7346 & 0.0162 & 0.0035 & 0.0002 & 0.0016 & 0.0003 & -0.0002 & -0.0002 \\ 0.0034 & 0.0404 & 0.4217 & 0.0647 & 0.0054 & 0.0427 & 0.0106 & -0.0018 & -0.0016 \\ 0.0010 & 0.0088 & 0.0647 & 0.4819 & 0.0603 & 0.4739 & 0.1264 & -0.0067 & -0.0053 \\ 0 & 0.0005 & 0.0054 & 0.0603 & 0.4743 & 0.4716 & 0.1260 & -0.0066 & -0.0052 \\ 0 & 0.0008 & 0.0085 & 0.0948 & 0.0943 & 0.7812 & 0.2103 & 0.0143 & 0.0137 \\ 0 & 0.0003 & 0.0042 & 0.0506 & 0.0504 & 0.4206 & 0.7749 & 0.4915 & 0.4186 \\ 0 & -0.0001 & -0.0004 & -0.0013 & -0.0013 & 0.0143 & 0.2458 & 0.8249 & 0.3460 \\ 0 & -0.0001 & -0.0003 & -0.0011 & -0.0010 & 0.0137 & 0.2093 & 0.3460 & 0.5482 \end{pmatrix} \qquad (5.20)$$

Jika elemen matriks G yang terlalu kecil diabaikan, maka diperoleh matriks struktur dari matriks G, yaitu:

$$S_G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & g_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{23} & g_{33} & g_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{43} & g_{44} & 0 & g_{46} & g_{47} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{55} & g_{56} & g_{57} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{64} & g_{65} & g_{66} & g_{67} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{74} & g_{75} & g_{76} & g_{77} & g_{78} & g_{79} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{87} & g_{88} & g_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{97} & g_{98} & g_{99} \end{pmatrix} \qquad (5.21)$$

Dari matriks struktur S_G di atas, terlihat adanya empat kelompok. Empat kelompok tersebut sama dengan dekomposisi berdasarkan *strongly coupled system* yang telah dibahas pada bagian pertama.

3. Indeks performansi sub optimal diperoleh dengan menggunakan persamaan 5.12., yaitu

$$J^* = \tfrac{1}{2}\ x_0^T\, K\, x_0 \qquad (5.22)$$

Jika

$$x_0 = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)^T \qquad (5.23)$$

maka

$$J^* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0.4584 & 0.0746 & 0.0007 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0746 & 0.3673 & 0.0081 & 0.0018 & 0.0001 & 0.0008 & 0.0001 & -0.0001 & -0.0001 \\ 0.0007 & 0.0081 & 0.0843 & 0.0129 & 0.0011 & 0.0085 & 0.0021 & -0.0004 & -0.0003 \\ 0.0002 & 0.0018 & 0.0129 & 0.0964 & 0.0121 & 0.0948 & 0.0253 & -0.0013 & -0.0011 \\ 0 & 0.0001 & 0.0011 & 0.0121 & 0.0949 & 0.0943 & 0.0252 & -0.0013 & -0.0010 \\ 0 & 0.0008 & 0.0085 & 0.0948 & 0.0943 & 0.7812 & 0.2103 & 0.0143 & 0.0137 \\ 0 & 0.0001 & 0.0021 & 0.0253 & 0.0252 & 0.2103 & 0.3874 & 0.2458 & 0.2093 \\ 0 & -0.0001 & -0.0004 & -0.0013 & -0.0013 & 0.0143 & 0.2458 & 0.8249 & 0.3460 \\ 0 & -0.0001 & -0.0003 & -0.0011 & -0.0010 & 0.0137 & 0.2093 & 0.3460 & 0.5482 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$J^* = 3.2180 \tag{5.24}$$

Dari hasil perhitungan di atas, diperoleh aksi kendali optimal yang meminimasi indeks performansi pada persamaan 5.14, di mana $G(t) = G(t_f)$ pada persamaan 5.20 dan nilai sub optimal indeks performansi adalah 3.2180.

Jadi, dengan memberikan aksi kendali optimal, di mana aksi kendali optimal ini merupakan umpan balik state yang diperoleh dengan meminimasi indeks performansi, maka level pertama sistem menjadi optimal.

II.5.2. OPTIMASI LEVEL KEDUA

Dalam pengendalian sistem pengendalian berhirarki, maka pencapaian *feasible optimal control* diantara subsistem hasil dekomposisi adalah hal yang teramat penting. Untuk sistem dengan dua level pengendalian, maka optimasi level pertama berpengaruh terhadap level kedua.

Jika diberikan sistem:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{5.25}$$

dan *quadratic cost function* yang akan diminimasi,

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) F x(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left(x^T Q x + u^T R u\right) dt \tag{5.26}$$

di mana $F \geq 0$, $Q \geq 0$, $R \geq 0$, t_o,t_f adalah waktu awal dan waktu akhir dan x_o adalah state awal.

Sistem disederhanakan menjadi N sub sistem, sehingga:

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t), + m_i(t) \qquad x_i(t_0) = x_{i0}, \qquad i = 1, ..., N \tag{5.27}$$

di mana $m_i(t)$ adalah

$$m_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} A_{ij} x_j(t) \tag{5.28}$$

yang menggambarkan interaksi dari subsistem ke-i dengan N-1 subsistem yang lainnya.

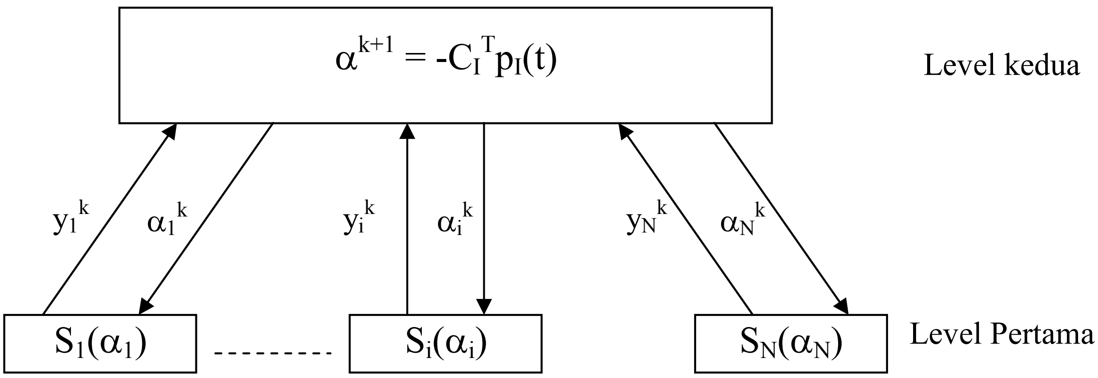
Matriks Q_i dan R_i adalah blok diagonal dan dengan matriks S_i yang antiblok-diagonal, maka akan terbentuk indeks performansi sistem yang terdekomposisi adalah:

$$J = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{1}{2} x_i^T(t_f) F_i x_i(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left[x_i^T(t) Q_i x_i(t) + u_i^T(t) R_i u_i(t) + m_i^T(t) S_i m_i(t) \right] dt \right\} \tag{5.29}$$

Dalam dekomposisi sistem linear terinterkoneksi secara luas ini, faktor *coupling* antar subsistem merupakan interaksi variabel-variabel $m_i(t)$. Interaksi ini akan digantikan oleh vektor parameter $\alpha = (\alpha_i, \ldots, \alpha_N)^T$ yang disebut juga vektor koordinasi dan dinyatakan oleh $S_i(\alpha)$, di mana i = 1,…,N.

Gambar 5.1. memperlihatkan struktur pengendalian dua level suatu sistem skala besar. Dengan cara ini, pada iterasi ke-k (atau langkah pertukaran informasi), tiap pengendali lokal i menerima α_i^k dari koordinator (hirarki level dua) untuk mendapatkan solusi $S_i(\alpha_i^k)$, dan mengirimkankan y_i^k dari solusi tersebut ke koordinator.

Minimasi fungsi dari beberapa variabel terdapat dalam area umum dari optimasi sehingga dibutuhkan metode minimasi yang tepat. Beberapa metode optimasi yang terkenal berdasar pada gradien fungsional f(x) dari vektor $x = (x_1, x_2, .., x_N)^T$ yang tidak diketahui. Diantara metode-metode gradien yang ada, metode *steepest descent* merupakan satu skema yang banyak dipakai. Dalam metode ini, arah pencarian optimum (minimum atau maximum) diberikan oleh $s^{(k)} = - g^{(k)}$, di mana $s^{(k)}$ adalah arah yang dicari selama k iterasi dan $g^{(k)}=\partial f(x^{(k)}/\partial x^{(k)})$ adalah vektor gradien. Di sini, pencarian metode dalam arah steepest descent, objective function akan berkurang untuk secepatnya menuju $x^{(k)}$. Dalam metode *steepest descent* $x^{(k)}$ biasanya jatuh di nilai yang terlalu jauh dari solusi hasil pembulatan error. Maka, metode ini sering tidak *reliable* dan tidak efisien.



Gambar 5.1. Sistem Pengendalian Berhirarki Dua Level

Metode *Interaction prediction* adalah metode lain yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan level kedua. Metode ini menggunakan fungsi Hamiltonian pada permasalahan level pertama untuk mendapatkan parameter sistem yang akan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan level kedua. Fungsi Hamilton dari sistem terdekomposisi di atas adalah:

$$H_i = \frac{1}{2} x_i^T(t) Q_i x_i(t) + \frac{1}{2} u_i^T(t) R_i u_i(t) + \alpha_i^T m_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{N} \left(\alpha_j^T A_{ji} x_i\right) + p_i^T \left(A_i x_i + B_i u_i + C_i z_i\right) \tag{5.30}$$

dan mempunyai syarat perlu optimalitas,

$$p_i(t) = K_i(t)x_i(t) + g_i(t) \tag{5.31}$$

dan dengan penyederhanaan penyelesaian permasalahan TPBV (*Two Point Boundary Value*), diperoleh,

$$\dot{K}_i(t) = -K_i(t)A_i - A_i^T K_i(t) + K_i(t)S_i K_i(t) - Q_i \tag{5.32}$$

$$\dot{g}_i(t) = -(A_i - S_i K_i(t))^T g_i(t) - K_i(t)m_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} A_{ji}^T \alpha_j^T(t) \tag{5.33}$$

di mana nilai akhir dari $K_i(t_f)$ dan $g_i(t_f)$ dari persamaan 5.29, sehingga

$$p_i(t) = \frac{\partial\left[\frac{1}{2}x_i^T(t_f)F_i x_i(t_f)\right]}{\partial x_i(t_f)} = F_i x_i(t_f) \tag{5.34}$$

dan dengan menggunakan persamaan 5.31 diperoleh:

$$K_i(t_f) = F \ \text{ dan } g_i(t_f) = 0 \tag{5.35}$$

Dari formulasi ini, aksi pengendalian u(t) pada optimasi level pertama adalah:

$$u_i(t) = -R_i^{-1}B_i^T K_i(t)x_i(t) - R_i^{-1}B_i^T g_i(t) \tag{5.36}$$

Pada permasalahan level kedua, bagian yang penting adalah meng-*update* vektor kordinasi (α) yang baru. Untuk tujuan ini, dengan memperhatikan fungsi Hamiltonian pada persamaan 5.30, persamaan-persamaan berikut adalah penyelesaian dari permasalahan level kedua:

$$\frac{\partial H_i}{\partial m_i} = \alpha_i + C_i^T p_i = 0$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial \alpha_i} = m_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} A_{ij} x_j = 0 \tag{5.37}$$

sehingga diperoleh:

$$\alpha_i(t) = -C_i^T p_i(t), \qquad m_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} A_{ij} x_j \tag{5.38}$$

Maka, prosedur koordinasi level kedua pada iterasi ke-(k+1) adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \alpha_i(t) \\ m_i(t) \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} -C_i^T p_i(t) \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} A_{ij} x_j \end{bmatrix}^{k} \tag{5.39}$$

Dari pembahasan di atas, maka metode *Interaction prediction* dapat diformulasikan sebagai berikut:

1. Persamaan differensial matriks riccati orde N dengan kondisi akhir pada persamaan 5.35 dapat diselesaikan dan mendapatkan serta menyimpan $K_i(t)$, di mana i=1,2, . . . , N dan $t_o \leq t \leq t_f$.
2. Dengan nilai awal $\alpha_i^o(t)$ dan $m_i^o(t)$ ditentukan, maka persamaan 5.33 dapat diselesaikan dengan kondisi akhir pada persamaan 5.35. Dari langkah ini $g_i(t)$ diperoleh dan nilainya disimpan.
3. Dengan hasil yang diperoleh pada langkah 1 dan 2, maka persamaan state berikut dapat diselesaikan.

$$\dot{x}_i(t) = (A_i - S_i K_i(t)) x_i(t) - S_i(t) g_i(t) + m_i(t), \qquad x_i(0) = x_i \tag{5.40}$$

4. Permasalahan level kedua adalah meng-*update* error interaksi dengan menggunakan hasil pada langkah 3 dan persamaan 5.39 sampai error interaksi menjadi cukup kecil. Dan perhitungan error interaksi adalah:

$$\text{Error} = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^{N} \int_{t_0}^{t_f} \left[m_i(t) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} A_{ij} x_j(t) \right]^T \left[m_i(t) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} A_{ij} x_j(t) \right] dt \right\}}{\Delta t} \tag{5.41}$$

di mana Δt adalah step size integrasi.

Dari formulasi ini, setelah beberapa kali iterasi dan diperoleh error interaksi yang cukup kecil, maka diperoleh vektor koordinasi α_i, state x_i, aksi pengendalian u_i di mana i=1..N optimal.

Contoh 5.2.:

Dari sistem pada contoh 3.1., dapatkan optimasi level kedua sistem jika diberikan nilai awal sebagai berikut:

- waktu awal $(t_0) = 0$ dan waktu akhir $(t_f) = 10$
- nilai awal $x_i(0)$ yang menyatakan x pada t=0, m_i^0 yang menyatakan m pada iterasi ke-0 dan α_i^0 yang menyatakan α pada iterasi ke-0.

Nilai awal $x_i(0)$, m_i^0 dan α_i^0 diberikan sebagai berikut:

$x_1[0] = 1$ $\quad \alpha_1^0 = 1$ $\quad m_1^0 = 0$

$x_2[0] = 1$ $\quad \alpha_2^0 = 1$ $\quad m_2^0 = 1/12$

$x_3[0] = 1$ $\quad \alpha_3^0 = 1$ $\quad m_3^0 = 1/12$

$x_4[0] = 1$ $\quad \alpha_4^0 = 1$ $\quad m_4^0 = 2/12$

$x_5[0] = 1$	$\alpha_5^0 = 1$	$m_5^0 = 1/12$
$x_6[0] = 1$	$\alpha_6^0 = 1$	$m_6^0 = 3/12$
$x_7[0] = 1$	$\alpha_7^0 = 1$	$m_7^0 = 1/12$
$x_8[0] = 1$	$\alpha_8^0 = 1$	$m_8^0 = 2/12$
$x_9[0] = 1$	$\alpha_9^0 = 1$	$m_9^0 = 2/12$

- $K_i(t)$ diperoleh dari hasil perhitungan pada optimasi level pertama.
- langkah integrasi (Δt) yang digunakan untuk mencari error interaksi adalah 0.1
- langkah iterasi (h) yang digunakan untuk menghitung persamaan differensial adalah 0.1, sehingga dilakukan 100 iterasi karena t_f=10

Penyelesaian:

Penyelesaian permasalahan tersebut dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mencari g(t)

   Jika persamaan 5.33 diaplikasikan pada model sistem dengan harga awal awal α dan m(t) ditentukan serta matriks A yang diperoleh dari model sistem, maka diperoleh persamaan g(t) sebagai berikut:

$$\dot{g}_1(t) = -[a_{11} - k_{11}(t)]^T g_1(t) - k_1(t) z_1(t)$$

$$\dot{g}_2(t) = -[a_{22} - k_{22}(t)]^T g_2(t) - k_2(t) z_2(t) + a_{21}\alpha_1(t)$$

$$\dot{g}_3(t) = -[a_{33} - k_{33}(t)]^T g_3(t) - k_3(t) z_3(t) + a_{32}\alpha_2(t) + a_{34}\alpha_4(t)$$

$$\dot{g}_4(t) = -[a_{44} - k_{44}(t)]^T g_4(t) - k_4(t)z_4(t) + a_{43}\alpha_3(t) + a_{46}\alpha_6(t)$$

$$\dot{g}_5(t) = -[a_{55} - k_{55}(t)]^T g_5(t) - k_5(t)z_5(t) + a_{56}\alpha_6(t)$$

$$\dot{g}_6(t) = -[a_{66} - k_{66}(t)]^T g_6(t) - k_6(t)z_6(t) + a_{64}\alpha_4(t) + a_{65}\alpha_5(t) + a_{67}\alpha_7(t)$$

$$\dot{g}_7(t) = -[a_{77} - k_{77}(t)]^T g_7(t) - k_7(t)z_7(t) + a_{76}\alpha_6(t)$$

$$\dot{g}_8(t) = -[a_{88} - k_{88}(t)]^T g_8(t) - k_8(t)z_8(t) + a_{87}\alpha_7(t) + a_{89}\alpha_9(t)$$

$$\dot{g}_9(t) = -[a_{99} - k_{99}(t)]^T g_9(t) - k_9(t)z_9(t) + a_{97}\alpha_7(t) + a_{98}\alpha_8(t)$$

(5.42)

2. Mencari State

   Dengan menggunakan informasi g(t) di atas dan persamaan 5.40, diperoleh persamaan x(t) sebagai berikut:

$$\dot{x}_1(t) = [a_{11} - k_{11}(t)]x_1(t) - g_1(t) + m_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = [a_{22} - k_{22}(t)]x_2(t) - g_2(t) + m_2(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = [a_{33} - k_{33}(t)]x_3(t) - g_3(t) + m_3(t)$$

$$\dot{x}_4(t) = [a_{44} - k_{44}(t)]x_4(t) - g_4(t) + m_4(t)$$

$$\dot{x}_5(t) = [a_{55} - k_{55}(t)]x_5(t) - g_5(t) + m_5(t)$$

$$\dot{x}_6(t) = [a_{66} - k_{66}(t)]x_6(t) - g_6(t) + m_6(t)$$

$$\dot{x}_7(t) = [a_{77} - k_{77}(t)]x_7(t) - g_7(t) + m_7(t)$$

$$\dot{x}_8(t) = [a_{88} - k_{88}(t)]x_8(t) - g_8(t) + m_8(t)$$

$$\dot{x}_9(t) = [a_{99} - k_{99}(t)]x_9(t) - g_9(t) + m_9(t)$$

(5.43)

3. Memberikan nilai baru vektor koordinasi α dan m(t)

   Untuk memberikan nilai baru pada vektor koordinasi α dan m(t) setelah iterasi, maka p(t) perlu dicari sesuai dengan persamaan 5.31. Dengan menggunakan x(t) dan g(t) yang diperoleh dari iterasi sebelumnya, pada iterasi sebelumnya, diperoleh persamaan p(t) sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
p_1(t) &= K_{11}(t)x_1(t) + g_1(t) \\
p_2(t) &= K_{22}(t)x_2(t) + g_2(t) \\
p_3(t) &= K_{33}(t)x_3(t) + g_3(t) \\
p_4(t) &= K_{44}(t)x_4(t) + g_4(t) \\
p_5(t) &= K_{55}(t)x_5(t) + g_5(t) \\
p_6(t) &= K_{66}(t)x_6(t) + g_6(t) \\
p_7(t) &= K_{77}(t)x_7(t) + g_7(t) \\
p_8(t) &= K_{88}(t)x_8(t) + g_8(t) \\
p_9(t) &= K_{99}(t)x_9(t) + g_9(t)
\end{aligned}
\tag{5.44}
$$

   Dengan p(t) yang dihasilkan di atas, maka vektor koordinasi α diberi nilai baru sesuai dengan persamaan 5.39. Persamaan α yang diperoleh adalah sebagai berikut:

$$\alpha_1(t)^{k+1} = -c_{11}p_1(t)$$

$$\alpha_2(t)^{k+1} = -c_{22}p_2(t)$$

$$\alpha_3(t)^{k+1} = -c_{33}p_3(t)$$

$$\alpha_4(t)^{k+1} = -c_{44}p_4(t)$$

$$\alpha_5(t)^{k+1} = -c_{55}p_5(t)$$

$$\alpha_6(t)^{k+1} = -c_{66}p_6(t)$$

$$\alpha_7(t)^{k+1} = -c_{77}p_7(t)$$

$$\alpha_8(t)^{k+1} = -c_{88}p_8(t)$$

$$\alpha_9(t)^{k+1} = -c_{99}p_9(t) \tag{5.45}$$

Dengan menggunakan x(t) pada iterasi sebelumnya diperoleh m(t) yang baru, yaitu:

$$m_1(t) = 0$$

$$m_2(t) = A_{21}x_2$$

$$m_3(t) = A_{32}x_2 + A_{34}x_4$$

$$m_4(t) = A_{43}x_3 + A_{46}x_6$$

$$m_5(t) = A_{56}x_6$$

$$m_6(t) = A_{64}x_4 + A_{65}x_5 + A_{67}x_7$$

$$m_7(t) = A_{76}x_6$$

$$m_8(t) = A_{87}x_7 + A_{89}x_9$$

$$m_9(t) = A_{97}x_7 + A_{98}x_8$$

(5.46)

4. Mencari Error Interaksi e(t)

Error interaksi dicari dengan menggunakan persamaan 5.41. Pada sistem pengendalian proses pembuatan semen menggunakan DCS di atas, diperoleh persamaan error interaksi:

$$
\begin{aligned}
e(t) = \frac{1}{\Delta t}\Bigg[& \int_{t_0}^{t_f} m_1(t)dt + \int_{t_0}^{t_f}[m_2(t) - A_{21}x_1(t)]dt + \int_{t_0}^{t_f}[m_3(t) - A_{32}x_2(t) - A_{34}x_4(t)]dt \\
& + \int_{t_0}^{t_f}[m_4(t) - A_{43}x_3(t) - A_{46}x_6(t)]dt + + \int_{t_0}^{t_f}[M_5(t) - A_{56}x_6(t)]dt \\
& + \int_{t_0}^{t_f}[m_6(t) - A_{64}x_4(t) - A_{65}x_5(t) - A_{67}x_7(t)]dt + \int_{t_0}^{t_f}[m_7(t) - A_{76}x_7(t)]dt \\
& + \int_{t_0}^{t_f}[m_8(t) - A_{87}x_7(t) - A_{89}x_9(t)]dt + \int_{t_0}^{t_f}[m_9(t) - A_{97}x_7(t) - A_{98}x_8(t)]dt
\end{aligned}
\qquad (5.47)
$$

Dengan menggunakan bahasa pemrograman Turbo Pascal 7.0, maka permasalahan di atas dapat diselesaikan. Program melakukan iterasi sampai error interaksi menjadi cukup kecil. Saat error interaksi cukup kecil, program menyimpan nilai $x_i(t)$, $m_i(t)$, α_i, $u_i(t)$ dan error interaksi.

Saat *running* program, iterasi dihentikan setelah diperoleh error interaksi yang cukup kecil (0.0134). Error interaksi yang cukup kecil ini diperoleh pada iterasi ke-25. Karena error interaksi tersebut diperoleh pada iterasi ke-25 maka α dan m(t) yang digunakan adalah α_i dan $m_i(t)$ pada iterasi ke-24, sedangkan $x_i(t)$ dan $u_i(t)$ yang digunakan adalah $x_i(t)$ dan $u_i(t)$ pada iterasi ke-25.

Pada iterasi ke-24, nilai vektor koordinasi α adalah sebagai berikut:

α_1 = 0.000031

α_2 = 0.000023

α_3 = 0.000029

$\alpha_4 = 0.000023$

$\alpha_5 = 0.000026$

$\alpha_6 = -0.000228$

$\alpha_7 = -0.000013$

$\alpha_8 = -0.000183$

$\alpha_9 = -0.000123$

(5.48)

Nilai $m_i(t)$ iterasi ke-24 adalah sebagai berikut:

$m_1 = 0.000000$

$m_2 = 0.000032$

$m_3 = 0.000289$

$m_4 = 0.000551$

$m_5 = 0.000351$

$m_6 = 0.000579$

$m_7 = 0.000351$

$m_8 = 0.000455$

$m_9 = 0.000425$

(5.49)

Error interaksi iterasi ke-1 sampai iterasi ke-25 terdapat pada Gambar 5.2. State ($x_i(t)$) iterasi ke-25 terdapat pada Gambar 5.3., dan aksi kendali ($u_i(t)$) iterasi ke-25 terdapat pada Gambar 5.4.

Pada iterasi ke-25, state x_1 sampai dengan x_9 menunjukkan perilaku yang sama, di mana nilainya turun secara eksponensial dari 1 yang merupakan nilai awal ($x_i(0)$) mendekati 0. Hal ini terjadi, karena tidak ada referensi yang menjadi tujuan x_i. State x_1 sampai dengan x_9 berhasil mencapai *steady state*. State pada iterasi ke-25 ini menggunakan vektor koordinasi α_i dan m_i hasil iterasi ke-24. Vektor koordinasi ini dipengaruhi oleh state (persamaan 5.31 dan 5.39), sehingga apabila x_i mendekati nol, maka α_i mendekati nol juga. Demikian juga m_i yang merupakan pengaruh dari sub sistem lain ke sub sistem i, sehingga apabila state sub sistem lain mendekati nol, maka m_i mendekati nol.

Aksi kendali u_i pada iterasi ke-25 nilainya naik dari nilai negatif menuju ke nol. Hal ini terjadi karena aksi kendali dipengaruhi state. Jadi pada iterasi ke-25, u_i mendekati nol karena x_i mendekati nol.

Error interaksi menjadi semakin kecil seiring dengan bertambahnya iterasi. Pada iterasi pertama, error interaksi = 6.0668, dan nilainya semakin turun sampai pada iterasi ke-5 nilainya dibawah 1 (0.6973) dan pada iterasi ke-25 nilainya = 0.0134. Karena nilai ini sudah cukup kecil, maka iterasi diberhentikan.

Dengan metode *interaction prediction*, level kedua sistem tersebut dapat dioptimasi. Error interaksi yang dihasilkan dari metode ini menggambarkan besarnya error yang terjadi pada interaksi antara satu sub sistem dengan sub sistem lain. Apabila error interaksinya cukup kecil, maka sistem tersebut optimal. Dari hasil perhitungan yang dilakukan, error interaksi yang cukup kecil terjadi pada iterasi ke-25 sehingga sistem tersebut optimal pada iterasi ke-25. Vektor koordinasi yang digunakan adalah vektor koordinasi iterasi ke-24 (persamaan 6.16). Hal ini terlihat juga pada perilaku state yang mencapai *steady state* pada harga yang mendekati nol untuk semua sub sistem.