2

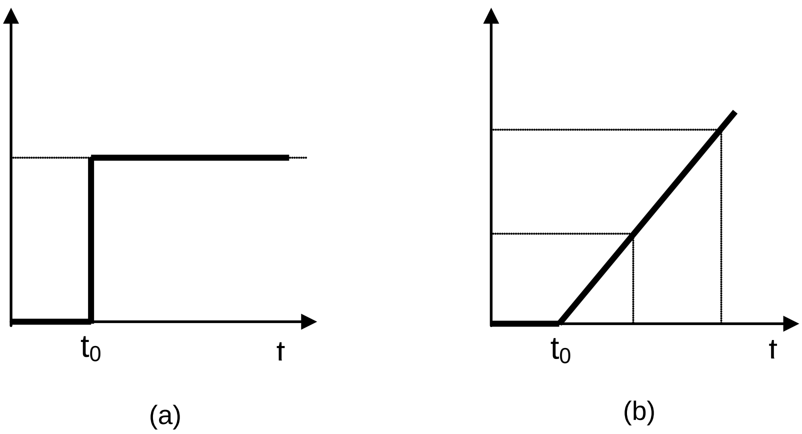
Tanggapan Waktu

2.1. Pendahuluan

Tahapan pertama dalam menganalisa suatu sistem kontrol adalah dengan menurunkan model matematik dari sistem tersebut. Sekali suatu model telah ditentukan, maka berbagai metode dapat diterapkan untuk menganalisa kinerja sistem tersebut.

Salah satu cara untuk menguji dan menganalisa suatu sistem adalah dengan memberikan suatu sinyal uji (*test signal*) sebagai masukan dan mengamati serta menganalisa keluarannya. Berbagai sinyal masukan dapat digunakan untuk keperluan analisa yang berbeda-beda. Jika sistem yang digunakan untuk keperluan masukan dengan kenaikan gradual sepanjang waktu, maka digunakan sinyal uji fungsi *ramp*. Sinyal fungsi *step* digunakan untuk menguji keandalan terhadap gangguan luar, dsb. Gambar 2.1 dan Gambar 2.2 memberikan gambaran contoh sinyal uji fungsi step dan fungsi ramp.

Keluaran yang dihasilkan merupakan tanggapan (*response*) dari sistem yang diberikan sinyal uji. Bila analisa yang dilakukan merupakan analisa dalam lingkup waktu dan masukan yang diberikan bukan merupakan fungsi periodik (mempunyai frekuensi), maka analisa tersebut merupakan analisa tanggapan waktu (*time response*).

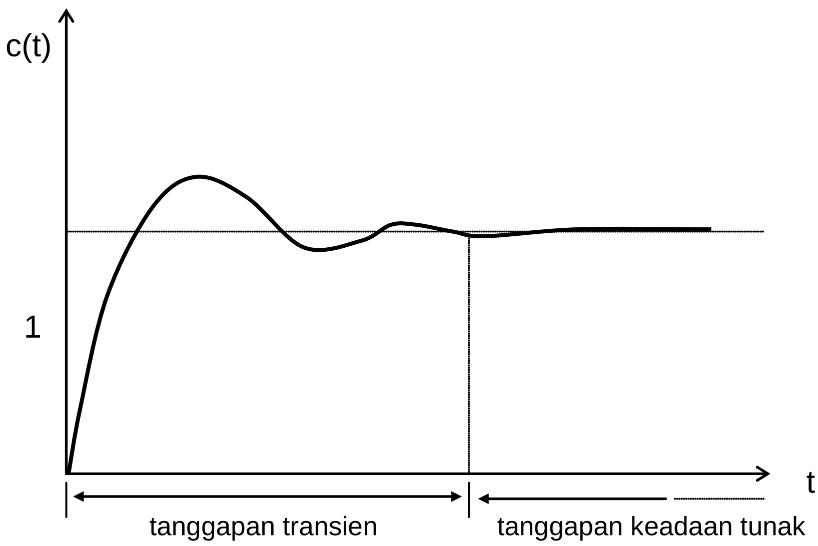


Gambar 2.1. (a) Grafik Fungsi *Step*,
dan (b) Grafik Fungsi *Ramp*

2.1. Tanggapan Transien dan Tanggapan Keadaan Tunak

Tanggapan waktu dari suatu sistem kontrol dibagi menjadi dua bagian : tanggapan transien (*transient response*) dan tanggapan keadaan tunak (*steady-state response*). Tanggapan transien berlangsung dari saat mulai hingga tanggapan sistem mencapai nilai akhir yang diinginkan (*final state*). Tanggapan keadaan tunak dimulai pada saat tanggapan mulai pertama kali mendekati nilai akhir hingga waktu yang tak terhingga. Gambar 2.2 mendeskripsikan kedua jenis tanggapan waktu tersebut.

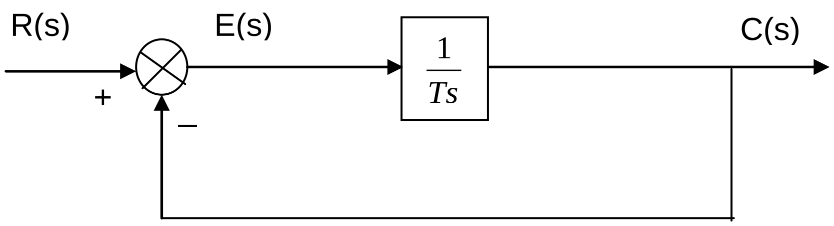
Tanggapan transien digunakan untuk menganalisa sifat naik atau permulaan dari suatu sistem bila diberikan sinyal uji. Sedangkan tanggapan keadaan tunak digunakan untuk menganalisa karakteristik sistem pada saat mencapai harga akhirnya.



Gambar 2.2. Tanggapan Transien dan Tanggapan Keadaan Tunak

2.2. Sistem Orde Satu

Suatu sistem orde satu diberikan oleh Gambar 2.3.



Gambar 2.3. Diagram kotak Sistem Orde Satu

Fungsi alih loop tertutup dari sistem tersebut diberikan oleh :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1}$$

Tanggapan *Unit-Step*

Untuk masukan fungsi *unit-step* , maka :

r(t) = 1, sehingga
R(s) = L[r(t)] = 1/s

Bila dimasukkan kedalam persamaan fungsi alih loop tertutup, maka didapatkan :

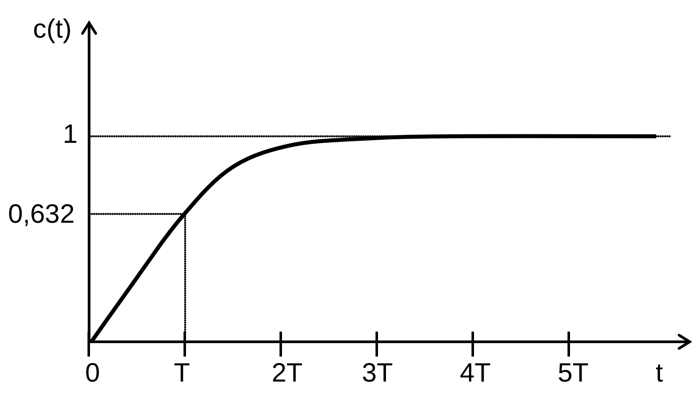
$$C(s) = \frac{1}{Ts+1}.\frac{1}{s}$$
$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

Transformasi balik Laplace memberikan hasil keluaran dalam fungsi waktu :

$c(t) = 1 - e^{-t/T}$, untuk $t \geq 0$

Keluaran c(t) ini digambarkan oleh Gambar 2.4.

Pada saat t = T, nilai c(t) = 0,632 = 63,2 %. Waktu pada saat nilai keluaran c(t) mempunyai nilai 63,2 % dari nilai masukannya disebut waktu konstan (*time constant*).



Gambar 2.4. Tanggapan *Unit-Step* Sistem Orde Satu

Contoh :

Bila diberikan suatu sistem loop tertutup dengan fungsi alih loop terbuka G(s) = $\frac{1}{s+3}$, tentukan karakteristik sistem loop tertutupnya untuk sinyal uji fungsi *unit-step*!

Jawab :

Fungsi alih loop terbuka diberikan oleh :

G(s) = $\frac{1}{s+3}$

Fungsi alih loop tertutup dari sistem tersebut dapat dicari :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1}{s+3}}{1+1.\frac{1}{s+3}} = \frac{1}{s+4}$$

Untuk masukan (sinyal uji) fungsi *unit-step*, maka nilai R(s) = 1/s, sehingga :

$$C(s) = \frac{1}{s+4}\frac{1}{s}$$

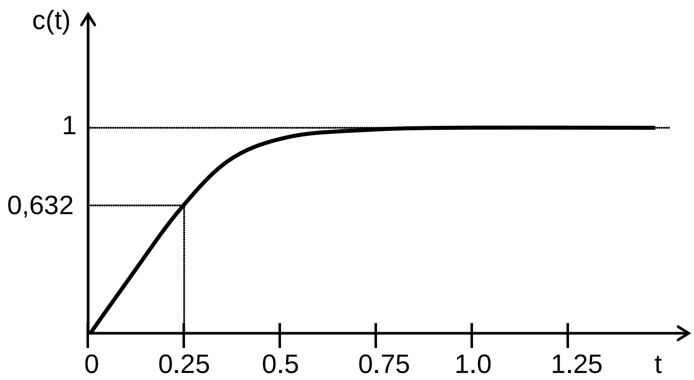
$$C(s) = \frac{1}{s(s+4)}$$

$$C(s) = \frac{0.25}{s} - \frac{0.25}{s+4}$$

Persamaan tersebut bila ditransformasi balik Laplace akan menghasilkan bentuk keluaran dalam fungsi waktu sebagai berikut :

$c(t) = 0.25(1 - e^{-4t})$, untuk $t \geq 0$

Karakteristik dari sistem ini digambarkan oleh konstanta waktu (*time constant*) yaitu T = 0.25 detik. Persamaan keluaran ini digambarkan oleh Gambar 2.5.



Gambar 2.5. Tanggapan Sistem

Tanggapan *Unit-Ramp*

Untuk masukan fungsi *unit-ramp* , maka :

$r(t) = t$, sehingga

$R(s) = L[r(t)]$

$= 1/s^2$

Bila dimasukkan kedalam persamaan fungsi alih loop tertutup, maka didapatkan :

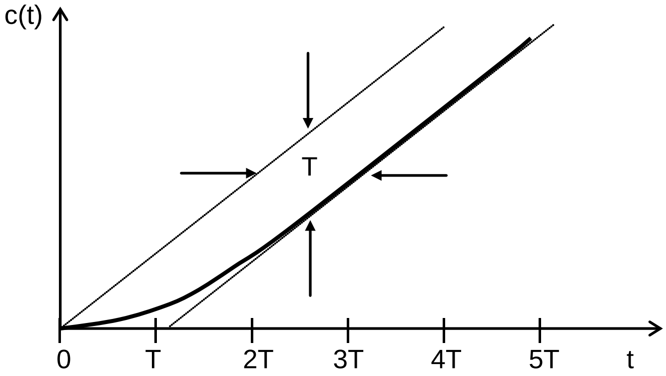
$$C(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} - \frac{T^2}{Ts+1}$$

Transformasi balik Laplace memberikan hasil keluaran dalam fungsi waktu :

$c(t) = t - T + Te^{-t/T}$, untuk $t \geq 0$

Keluaran c(t) ini digambarkan oleh Gambar 2.6.



Gambar 2.6. Tanggapan *Unit-Ramp* Sistem Orde Satu

Sinyal *error* e(t) dideskripsikan sebagai :

$$e(t) = r(t) - c(t)$$
$$= T(1 - e^{-t/T})$$

untuk t = ~ , maka

$$e(\sim) = T$$

Contoh :

Bila diberikan suatu sistem loop tertutup dengan fungsi alih loop terbuka $G(s) = \frac{1}{s+3}$, tentukan karakteristik sistem loop tertutupnya untuk sinyal uji fungsi *unit-ramp*!

Jawab :

Fungsi alih loop terbuka diberikan oleh :

$$G(s) = \frac{1}{s+3}$$

Sama seperti contoh sebelumnya, fungsi alih loop tertutupnya dapat dituliskan :

$$C(s) = \frac{1}{(s+4)}$$

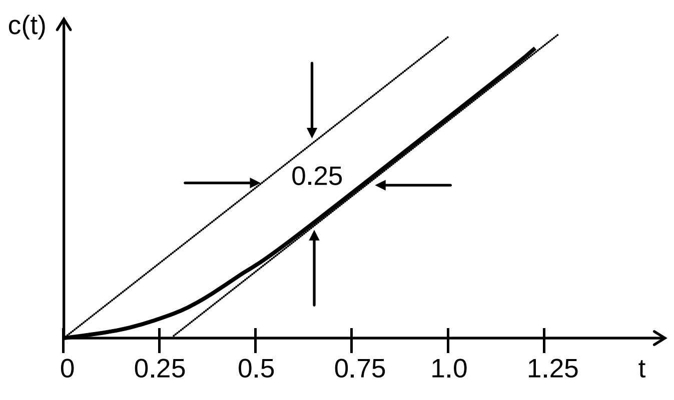
Pemberian sinyal uji fungsi *unit-ramp* berarti nilai R(s) = $1/s^2$, sehingga :

$$C(s) = \frac{1}{s+4}.\frac{1}{s^2}$$
$$= 0.25\left[\frac{1}{s^2} - \frac{0.25}{s} - \frac{0.0625}{s+4}\right]$$

Transformasi balik Laplace memberikan hasil keluaran dalam fungsi waktu :

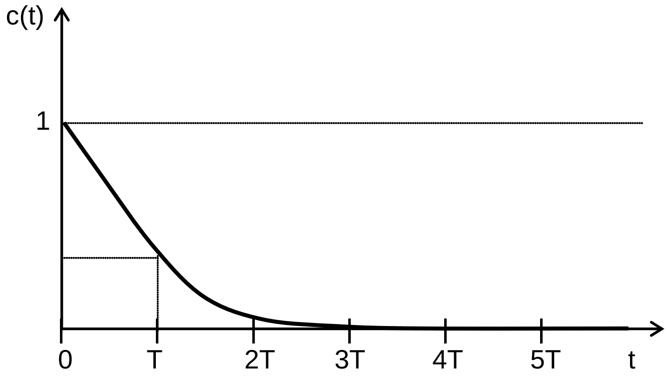
$$c(t) = 0.25[\ t - 0.25T + 0.0625e^{-4t}], \quad \text{untuk } t \geq 0$$

Keluaran c(t) ini digambarkan oleh Gambar 2.7. Karakteristik dari sistemnya diberikan oleh konstanta waktu T = 0.25.



Gambar 2.7. Tanggapan Sistem

Tanggapan Unit-Impulse



Gambar 2.8. Tanggapan *Unit-Impulse* Sistem Orde Satu

Untuk masukan fungsi *unit-impulse* , maka :

r(t) = δ(t), sehingga

R(s) = L[r(t)]

= 1

Bila dimasukkan ke dalam persamaan fungsi alih loop tertutup, maka didapatkan :

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1}.1$$

Transformasi balik Laplace memberikan hasil keluaran dalam fungsi waktu :

$$c(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T}, \qquad \text{untuk } t \geq 0$$

Keluaran c(t) ini digambarkan oleh Gambar 2.8.

Contoh :

Bila diberikan suatu sistem loop tertutup dengan fungsi alih loop terbuka G(s) = $\frac{1}{s+3}$, tentukan karakteristik sistem loop tertutupnya untuk sinyal uji fungsi *unit-impulse*!

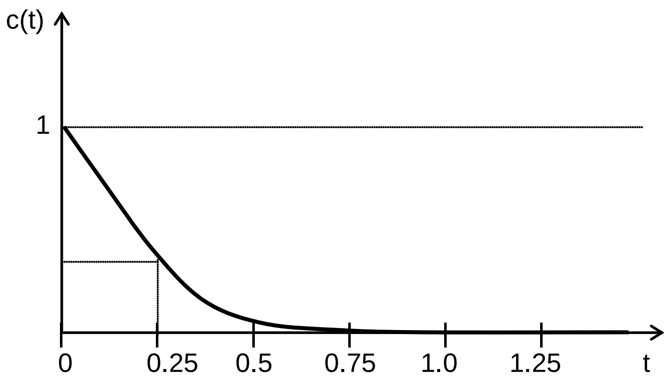
Jawab :

Fungsi alih loop terbuka diberikan oleh :

G(s) = $\frac{1}{s+3}$

Sama seperti contoh sebelumnya, fungsi alih loop tertutupnya dapat dituliskan :

$$C(s) = \frac{1}{(s+4)}$$



Gambar 2.9. Tanggapan Sistem

Pemberian sinyal uji fungsi *unit-impulse* berarti nilai R(s) = 1, sehingga :

$$C(s) = \frac{1}{(s+4)}$$

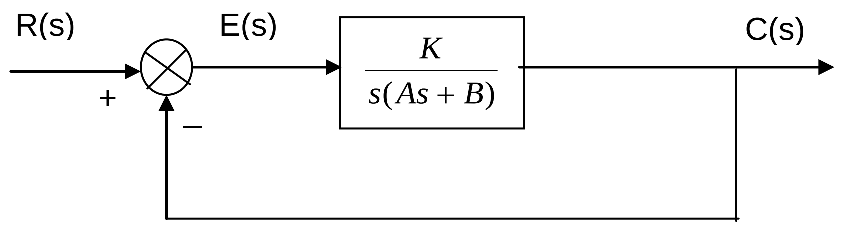
Transformasi balik Laplace memberikan hasil keluaran dalam fungsi waktu :

$c(t) = 4e^{-4t}$, untuk $t \geq 0$

Keluaran c(t) ini digambarkan oleh Gambar 2.9. Karakteristik dari sistemnya diberikan oleh konstanta waktu T = 0.25.

2.3. Sistem Orde Dua

Suatu sistem orde dua diberikan oleh Gambar 2.10.



Gambar 2.10. Diagram Kotak Sistem Orde Dua

Fungsi alih loop tertutup dari sistem tersebut diberikan oleh :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{As^2 + Bs + K}$$

Tanggapan *Unit-Step*

Fungsi alih loop tertutup dapat ditulis ulang menjadi :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{A}}{\left[s + \frac{B}{2A} + \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{K}{A}}\right]\left[s + \frac{B}{2A} - \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{K}{A}}\right]}$$

Pole-pole dari fungsi alih loop tertutup di atas kompleks bila $B^2 - 4AK < 0$ dan real bila $B^2 - 4AK \geq 0$.

Didefinisikan :

$$\frac{K}{A} = \omega_n^2 \qquad , \frac{B}{A} = 2\zeta\omega_n = 2\tau$$

dimana :

ω_n = frekuensi alami takteredam (*undamped natural frequency*)

τ = *attenuation*

ζ = rasio peredaman (*damping ratio*)

maka :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

atau

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)}$$

dimana $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ → frekuensi alami teredam (*damped natural frequency*).

Dari persamaan di atas, menunjukkan bahwa sifat-sifat dinamik sistem orde dua dapat digambarkan oleh dua parameter, yakni frekuensi alami takteredam (ω_n) dan rasio peredaman (ζ).

Untuk masukan *unit-step*, R(s) = 1/s, persamaan tanggapan waktu diberikan oleh penurunan sebagai berikut :

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

Bila persamaan di atas ditransformasi Laplace balik, maka akan didapatkan tanggapan sistem dalam fungsi waktu :

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left[\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right]$$

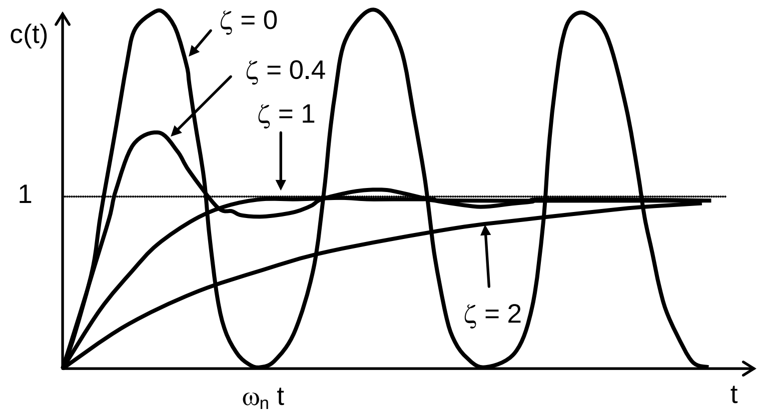
$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left[\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right] \quad \text{, untuk } t \geq 0$$

Untuk nilai ζ yang bervariasi akan didapatkan kasus-kasus yang berbeda, yaitu :

- Untuk nilai ζ : $0 < \zeta < 1$, tanggapan sistem yang dihasilkan disebut tanggapan redaman kurang (*underdamped*).
- Untuk nilai $\zeta = 1$, tanggapan sistem yang dihasilkan disebut tanggapan redaman kritis (*criticallydamped*).
- Untuk nilai $\zeta > 1$, tanggapan sistem yang dihasilkan disebut tanggapan redaman lebih (*overdamped*).

Pengaruh variasi ζ ini diperlihatkan pada Gambar 2.11.

Dalam perancangan sistem kontrol, karakteristik kinerja yang diinginkan oleh sistem tersebut harus dispesifikasikan dalam bentuk domain waktu. Pada umumnya, spesifikasi ini diberikan untuk tanggapan fungsi unit-step yang dianggap bisa mewakili kinerja sistem secara keseluruhan.



Gambar 2.11. Tanggapan Fungsi Unit-Step untuk Variasi Rasio Peredaman

Contoh :

Diberikan fungsi alih suatu sistem loop tertutup adalah :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

Tentukan harga frekuensi alami takteredam dan rasio peredamannya! Jenis kasus apakah sistem tersebut?

Jawab :

Untuk sistem dengan fungsi alih loop tertutup dapat disetarakan dengan bentuk persamaan umum orde duanya, penyetaraan tersebut sangat berguna untuk mencari nilai ω_n dan ζ, seperti berikut ini (analisa Root-Locus pada bab selanjutnya dapat digunakan untuk fungsi alih loop tertutup yang tidak bisa disetarakan dengan bentuk umumnya) :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \equiv \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

Dari penyetaraan tersebut terlihat bahwa :

ω_n = 2 (nilai ini tidak mungkin negatif, karena besaran frekuensi harus positif)

ζ = 0.5

Dengan nilai ζ = 0.5, maka sistem tersebut termasuk kasus *underdamped* (redaman kurang).

Spesifikasi Tanggapan Transien

Spesifikasi tanggapan transien dalam domain waktu yang dimaksud adalah:

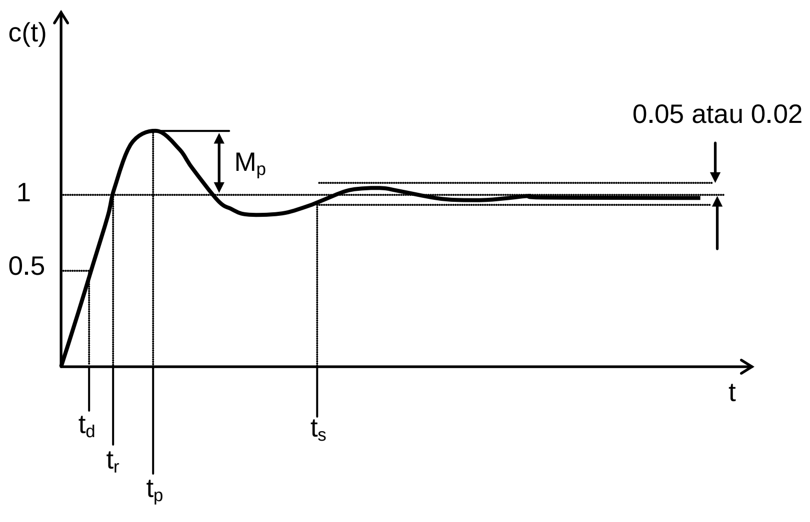
1. Waktu tunda (*delay time*), t_d :
   adalah waktu yang dibutuhkan tanggapan untuk mencapai setengah dari nilai akhir dari tanggapan untuk pertama kali.
2. Waktu naik (*rise time*), t_r :
   adalah waktu yang dibutuhkan untuk naik dari 10% – 90%, 5% – 95%, atau 0% – 100% dari nilai akhir dari tanggapan. Untuk kasus *underdamped*, biasanya digunakan kriteria 0% – 100%. Untuk kasus *overdamped*, biasanya digunakan kriteria 10% – 90%.

3. Waktu puncak (*peak time*), t_p :
   adalah waktu yang dibutuhkan tanggapan untuk mencapai nilai puncak dari *overshoot* pertama kali.
4. *Overshoot* maksimum (*maximum overshoot*), M_p :
   adalah nilai puncak maksimum dari tanggapan diukur dari nilai akhir dari tanggapan. Biasanya dirumuskan dalam persentase :

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \text{x}100\%$$

5. Waktu *settling* (*settling time*), t_s :
   adalah waktu yang dibutuhkan tanggapan untuk mencapai nilai akhir dari tanggapan dan tetap berada pada nilai tersebut dalam range persentase tertentu dari nilai akhir (biasanya 5% atau 2%).

Spesifikasi tanggapan transien untuk masukan fungsi *unit-step* diberikan pada Gambar 2.12.



Gambar 2.12. Spesifikasi Tanggapan Transien
Fungsi Unit-Step

Hubungan Frekuensi Alami Takteredam (ω_n) dan Rasio Peredaman (ζ) dengan Spesifikasi Sistem Kontrol untuk Tanggapan Transien

Selain spesifikasi dalam bentuk waktu, tanggapan transien juga mempunyai cara lain dalam memberikan spesifikasi sistem, yaitu melalui frekuensi alami takteredam (ω_n) dan rasio peredaman (ζ). Hubungan antara dua cara spesifikasi tersebut akan dijelaskan dalam ulasan berikut :

Persamaan umum sistem orde dua dengan masukan fungsi step dalam domain waktu diberikan oleh :

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left[\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right]$$

dimana $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

Untuk t = t_r (waktu naik) :

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_r}\left[\cos\omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2}}\sin\omega_d t_r\right]$$

c(t) = 1

karena nilai $e^{-\zeta\omega_n t_r} \neq 0$, maka :

$$\cos\omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t_r = 0$$

$$\cos\omega_d t_r = \frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t_r$$

$$\tan\omega_d t_r = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta} = -\frac{\omega_d}{\sigma}$$

dimana :

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$
$$\sigma = \zeta\omega_n$$

$$t_r = \frac{1}{\omega_d}\tan^{-1}\left[\frac{\omega_d}{-\sigma}\right]$$
$$t_r = \frac{\pi-\beta}{\omega_d}$$

Nilai $\pi = 3.14$ dan nilai β ditentukan oleh perhitungan :

$$\beta = \tan^{-1}\left[\frac{\omega_d}{\sigma}\right]$$

Untuk $t = t_p$ (waktu puncak) :

Pada saat $t = t_p$, nilai dari c(t) mencapai maksimum. Ini berarti turunan dari c(t) terhadap t mempunyai nilai nol untuk $t = t_p$.

$$\frac{dc(t)}{dt} = \zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}\left[\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right] + e^{-\zeta\omega_n t}\left[\omega_d \sin\omega_d t - \frac{\zeta\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos\omega_d t\right]$$
$$\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=t_p} = (\sin\omega_d t_p)\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t_p} = 0$$

sehingga :

$\sin \omega_d t_p = 0$

$\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$

karena t_p berhubungan dengan waktu puncak pertama kali, maka :

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Dengan cara yang sama penurunan rumus untuk M_p dan t_s diberikan oleh :

$$M_p = e^{-(\sigma/\omega_d)\pi}$$

dan

$t_s = 4/\sigma$ → untuk kriteria 2%

$t_s = 3/\sigma$ → untuk kriteria 5%

Contoh :

Diberikan fungsi alih suatu sistem loop tertutup adalah :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

Tentukan spesifikasi tanggapan transiennya untuk sinyal uji fungsi *unit-step*! Gambarkan bentuk tanggapan waktunya!

Jawab :

Fungsi alih loop tertutup diberikan oleh :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

Dari perhitungan pada contoh sebelumnya, kita dapatkan nilai $\omega_n = 2$ dan nilai $\zeta = 0.5$. Maka kita dapat menghitung spesifikasi tanggapan transiennya sebagai berikut :

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = 1.732$$
$$\sigma = \zeta\omega_n = 1$$

Waktu naik (t_r) :

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

π = 3.14

$$\beta = \tan^{-1}\left[\frac{\omega_d}{\sigma}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\omega_n}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{1.732}{1}\right]$$

$$\beta = 1.05$$

$$t_r = \frac{3.14 - 1.05}{1.732} = 1.21 \text{ detik}$$

Waktu puncak (t_p) :

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$t_p = \frac{3.14}{1.732} = 1.81 \text{ detik.}$$

Overshoot maksimum (M_p) :

$$M_p = e^{-(\sigma/\omega_d)\pi}$$

$$M_p = e^{-(1/1.732)3.14} = 0.16 \text{ atau } 16\ \%.$$

Waktu *settling* (t_s):

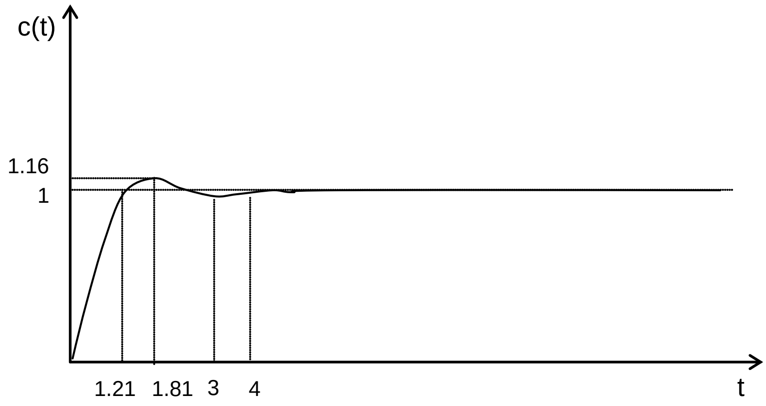
$t_s = 4/\sigma$ → untuk kriteria 2%

$t_s = 4/1 = 4$ detik

$t_s = 3/\sigma \rightarrow$ untuk kriteria 5%

$t_s = 3/1 = 3$ detik.

Tanggapan sistemnya diberikan oleh Gambar 2.13.



Gambar 2.13. Tanggapan Sistem

2.4. Sistem Orde Tinggi

Dalam buku ini, yang dimaksud dengan sistem orde tinggi adalah sistem-sistem yang mempunyai orde lebih dari 2 (sistem orde 3, orde 4, dst). Untuk analisa praktis, kita akan membahas sistem orde tiga yang dianggap bisa mewakili sistem-sistem orde tinggi yang lain.

Suatu sistem orde tiga mempunyai fungsi alih loop terbuka sebagai berikut :

$$G(s) = \frac{\dfrac{K\omega_n^2}{T}}{(s+\dfrac{1}{T})(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$$

bila diekspansikan menjadi fraksi-parsial :

$$G(s)=\frac{K_1}{(s+1/T)}+\frac{K_2}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}+\frac{K_3 s}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$$

Hasil ini merupakan penjumlahan terhadap tanggapan sistem orde satu dan sistem orde dua (dua buah sistem orde dua). Dengan mengetahui spesifikasi dari masing-masing bagian dari persamaan tersebut (baik untuk orde satu maupun orde dua), maka kita dapat memperkirakan spesifikasi tanggapan orde tiganya.

Untuk sistem dengan orde-orde yang lebih tinggi, analisanya pun identik dengan analisa sistem orde tiga ini.

2.5. Kesalahan Keadaan Tunak

Spesifikasi kontrol tanggapan keadaan tunak yang biasanya digunakan adalah kesalahan keadaan tunak (*steady-state error*). Pembahasan mengenai spesifikasi tanggapan keadaan tunak ini sengaja dibuat dalam sub-bab tersendiri karena sifat pembahasannya yang general untuk semua orde sistem.

Kesalahan keadaan tunak adalah kesalahan yang terjadi pada saat keluaran dari sistem mencapai harga akhir. Kesalahan ini diperbandingkan terhadap masukan dari sistemnya. Bila keadaan akhir dari keluaran tidak sama dengan masukannya, berarti terdapat kesalahan keadaan tunak.

Klasifikasi Sistem Kontrol

Suatu sistem kontrol mempunyai fungsi alih loop terbuka sebagai berikut :

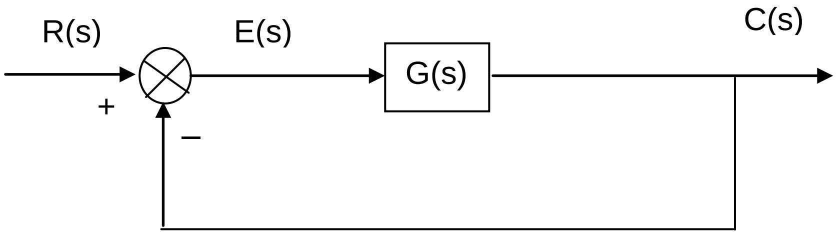
$$G(s)=\frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{s^N(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p s+1)}$$

Sistem tersebut dinamakan sistem tipe 0, tipe 1, tipe 2, …, jika N = 0, N = 1, N = 2, … dan seterusnya.

Kesalahan Keadaan Tunak

Suatu sistem berumpan balik tunggal seperti yang terlihat pada Gambar 2.14, mempunyai fungsi alih loop tertutup sebagai berikut :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$



Gambar 2.14. Sistem Kontrol Umpan Balik Tunggal

Fungsi alih antara sinyal error dengan sinyal masukan diberikan oleh :

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1-G(s)}$$

sehingga didapatkan :

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s)$$

Kesalahan keadaan tunak (*error steady-state*) adalah :

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)}$$

Konstanta Kesalahan Posisi Statik (*Static Position Error Constant*) – K_P

Kesalahan keadaan tunak untuk masukan fungsi step diberikan oleh :

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)} \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{1+G(0)} \end{aligned}$$

Konstanta kesalahan posisi statik didefinisikan oleh :

$$K_P = \lim_{s\to 0} G(s) = G(0)$$

sehingga kesalahan keadaan tunak dapat dituliskan kembali sebagai fungsi dari K_P seperti berikut ini :

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_P}$$

Untuk sistem tipe 0 :

$$K_P = \lim_{s\to 0} \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = K$$

Untuk sistem tipe 1 atau lebih :

$$K_P = \lim_{s\to 0} \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots}{s^N (T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = \infty \text{, untuk } N \geq 0.$$

sehingga kesalahan keadaan tunak untuk masukan fungsi unit step diberikan oleh :

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K} \qquad \text{untuk sistem tipe 0}$$

$e_{ss} = 0$ untuk sistem tipe 1 dan tipe di atas 1.

Konstanta Kesalahan Kecepatan Statik (*Static Velocity Error Constant*) – K_V

Kesalahan keadaan tunak untuk sistem dengan masukan fungsi unit-ramp diberikan oleh :

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)} \frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{1}{sG(s)} \end{aligned}$$

Konstanta kesalahan kecepatan statik (K_V) didefinisikan oleh :

$$K_V = \lim_{s\to 0} sG(s)$$

sehingga kesalahan keadaan tunak dapat dituliskan ulang menjadi :

$$e_{ss} = \frac{1}{K_V}$$

Untuk sistem tipe 0 :

$$K_V = \lim_{s\to 0} \frac{sK(T_a s+1)(T_a s+1)\cdots}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = 0$$

Untuk sistem tipe 1 :

$$K_V = \lim_{s\to 0} \frac{sK(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = K$$

Untuk sistem tipe 2 atau lebih :

$$K_V = \lim_{s\to 0} \frac{sK(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots}{s^N (T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = \infty, \qquad \text{untuk N} \geq 2.$$

Kesalahan keadaan tunak e_{ss} untuk masukan fungsi unit-ramp dapat disimpulkan sebagai berikut :

$$e_{ss} = \frac{1}{K_V} = \infty, \qquad \text{untuk sistem tipe 0}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_V} = \frac{1}{K}, \qquad \text{untuk sistem tipe 1}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_V} = 0, \qquad \text{untuk sistem tipe 2 atau lebih.}$$

Konstanta Kesalahan Percepatan Statik (*Static Acceleration Error Constant*) – K_a

Kesalahan keadaan tunak dari sistem dengan masukan fungsi unit-parabolik yang didefinisikan oleh :

$$\begin{aligned} r(t) &= t^2/2, && \text{untuk } t \geq 0 \\ &= 0, && \text{untuk } t < 0 \end{aligned}$$

diberikan oleh :

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)} \frac{1}{s^3} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2 G(s)} \end{aligned}$$

Konstanta kesalahan percepatan statik didefinisikan oleh :

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$$

sehingga kesalahan keadaan tunak dapat dituliskan ulang menjadi :

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

Untuk sistem tipe 0 :

$$K_a = \lim_{s \to 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1)\cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots} = 0$$

Untuk sistem tipe 1 :

$$K_a = \lim_{s \to 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1)\cdots}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots} = 0$$

Untuk sistem tipe 2 :

$$K_a = \lim_{s \to 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1)\cdots}{s^2 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots} = K$$

Untuk sistem tipe 3 dan selebihnya :

$$K_a = \lim_{s \to 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1)\cdots}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots} = \infty, \qquad \text{untuk N} \geq 3$$

Kesalahan keadaan tunaknya dapat disimpulkan sebagai berikut :

$$e_{ss} = \infty, \qquad \text{untuk sistem tipe 0 dan tipe 1}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K}, \qquad \text{untuk sistem tipe 2}$$

$$e_{ss} = 0, \qquad \text{untuk sistem tipe 3 atau lebih}$$

Latihan Soal :

1.