3

Analisa Kestabilan

3.1. Pendahuluan

Hal yang amat penting dalam desain sistem kontrol adalah masalah stabilitas sistem. Bukan hal yang rahasia lagi bahwa pokok tujuan terpenting dalam analisa dan desain kontrol adalah menciptakan suatu sistem yang stabil.

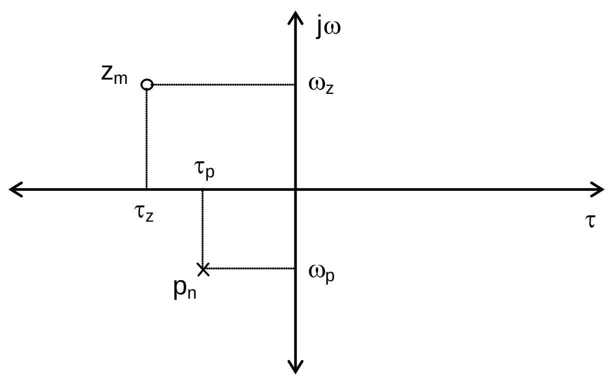
Suatu sistem dikatakan stabil apabila tercipta kondisi dimana tanggapan (*response*) sistem bersifat terbatas jika diberikan masukan sistem yang bersifat terbatas pula. yang dimaksud terbatas di sini adalah harga maksimumnya terbatas, sebagai contoh : $f(t) = A \sin \omega t$, maka harga maksimum dari f(t) tidak akan melebihi A (terbatas pada A).

3.2. Konsep Umum Kestabilan

Bila diberikan persamaan fungsi alih dari suatu sistem loop tertutup sebagai berikut :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \quad \text{, dimana n > m}$$

maka akar-akar dari persamaan pembilang (*nominator*) yaitu s = - z_1, s = - z_2, … , s = - z_m adalah *zero-zero* dari fungsi alih loop tertutup sistem. Sedangkan akar-akar dari persamaan penyebut (*denominator*) yaitu s = - p_1, s = - p_2, … , s = - p_m adalah *zero-zero* dari fungsi alih loop tertutup sistem. Dalam penggambaran pada bidang s (koordinat real vs imajiner), zero digambarkan dengan tanda bulatan kecil dan pole digambarkan dengan tanda silang. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1. Letak Pole dan Zero dalam Bidang s

Dari Gambar 3.1, zero z_m dinyatakan dalam koordinat $z_m(\tau_z, \omega_z)$ dimana nilai dari $z_m = \tau_z + j\omega_z$. Pole p_n dinyatakan dalam koordinat $p_n(\tau_p, \omega_p)$ dimana nilai dari $p_n = \tau_p + j\omega_p$.

Dalam analisa kestabilan, seringkali yang digunakan adalah akar-akar dari persamaan denominator yaitu pole-pole. Karena seringnya penggunaan persamaan denominator ini untuk menganalisa karakteristik kestabilan suatu sistem, maka persamaan denominator ini diberi nama persamaan karakteristik.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

1 + G(s)H(s) = 0 $\rightarrow$ Persamaan Karakteristik (PK)

Analisa Kestabilan dari Letak Pole-Pole

Fungsi alih loop tertutup dapat diubah menjadi deret parsial sebagai berikut :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{A_0}{s-p_0} + \frac{A_1}{s-p_1} + \cdots + \frac{A_n}{s-p_n}$$

dimana :

$A_0 \dots A_n$ = konstanta

$p_0 \dots p_n$ = akar-akar persamaan karakteristik

Tanggapan waktu untuk input unit step adalah :

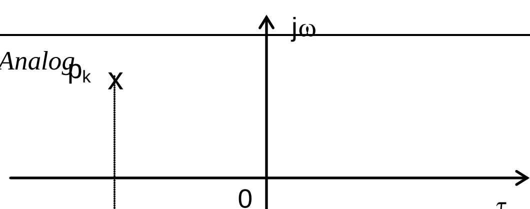
$$c(t) = 1 + A_0 e^{p_0 t} + A_1 e^{p_1 t} + \cdots + A_n e^{p_n t}$$

Bentuk umum akar-akar persamaan karakteristik diberikan oleh :

$p_k = \tau_k + j\omega_k$

Kestabilan suatu sistem dapat dilihat dari letak pole-pole fungsi alih loop tertutup atau akar-akar dari persamaan karakteristik pada bidang s.

Bila semua τ_k negatif, letak salah satu akar p_k pada bidang s terlihat seperti Gambar 3.2, dimana p_k^* adalah konjugate dari p_k.



Gambar 3.2. Pole dengan τ_k Negatif

Tanggapan waktu dari masukan unit step adalah :

$$|c(t)| = 1 + |A_0||e^{\tau_0 t}| + \cdots + |A_n||e^{\tau_n t}|$$

untuk setiap t, maka :

$$|e^{j\omega_n t}| = 1 \text{ dan } |e^{\tau_k t}| < \infty \text{ karena nilai } \tau_k \text{ negatif.}$$

$|e^{\tau_k t}|$ untuk τ_k negatif akan bernilai satu bila t = 0 dan akan bergerak turun hingga nol untuk waktu tak terhingga. Dengan demikian nilai dari |c(t)| selalu kurang dari tak terhingga, dengan artian nilainya terbatas.

Konsep stabilitas adalah adanya keterbatasan nilai tanggapan terhadap masukan yang bersifat terbatas. Dalam kondisi ini (τ_k negatif), syarat stabilitas terpenuhi, sehingga dapat disimpulkan : *bila suatu sistem mempunyai akar-akar persamaan karakteristik (pole-pole) yang terletak di sebelah kiri sumbu imajiner pada bidang s, maka sistem tersebut adalah stabil.*

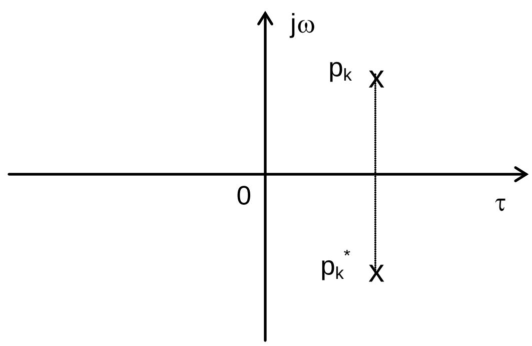
Bila salah satu dari τ_k ada yang bernilai positif, letak salah satu akar p_k pada bidang s terlihat seperti Gambar 3.3, dimana p_k^* adalah konjugate dari p_k. Tanggapan waktu dari masukan unit step adalah :

$$|c(t)| = 1 + |A_0||e^{\tau_0 t}| + \cdots + |A_n||e^{\tau_n t}|$$

untuk setiap t, maka untuk nilai τ_k negatif :

$$|e^{\tau_n t}| < \infty$$

sedangkan untuk nilai τ_k positif, nilainya akan satu untuk t = 0 dan tak berhingga untuk waktu yang tak terhingga. Sehingga nilai |c(t)| menjadi tak berhingga untuk waktu tak terhingga, dengan demikian tanggapan waktunya menjadi tak terbatas.



Gambar 3.3. Pole dengan τ_k Positif

Karena tanggapan waktu masukan fungsi step yang tak terbatas, maka dapat disimpulkan : *bila ada salah satu atau lebih akar-akar dari persamaan karakteristik (pole-pole) terletak di sebelah kanan sumbu imajiner pada bidang s, maka sistem tersebut tidak stabil.*

Analisa kestabilan dengan menggunakan persamaan karakteristik ini cukup mudah dan tidak berbelit-belit. Akan tetapi cara ini menjadi semakin sulit untuk diaplikasikan pada sistem-sistem berorde tinggi, karena untuk mencari akar-akar persamaan polinomial derajat n (untuk n > 2) tidak semudah mencari akar-akar persamaan kuadrat biasa. Dengan sulitnya mencari akar-akar persamaan tersebut, penggunaan persamaan karakteristik ini menjadi tidak efisien lagi. Untuk itu beberapa analisa kestabilan yang lain akan dibahas dalam bab ini.

3.3. Kriteria Stabilitas Hurwitz

Persamaan karakteristik sistem orde n diberikan oleh :

$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n = 0$

Dari persamaan karakteristik tersebut dapat dibentuk suatu matrik determinan yang sering disebut sebagai determinan Hurwitz sebagai berikut :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \cdots & a_n \end{vmatrix} \qquad \rightarrow \text{ determinan Hurwitz}$$

Nilai-nilai untuk koofisien dengan indeks lebih besar dari n atau dengan indeks negatif diganti dengan nol.

Kondisi stabilitas terpenuhi jika :

$\Delta_k > 0$, untuk k = 1, 2, 3, …, n

dimana nilai-nilai Δ_k dihitung dengan cara :

$$\Delta_1 = a_1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$$

dst hingga Δ_{n}.

Jadi, syarat sistem stabil bila keseluruhan nilai dari determinan-determinan tersebut adalah positif.

3.4. Kriteria Stabilitas Routh-Hurwitz

Persamaan karakteristik sistem orde n diberikan oleh :

$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0$

Dari persamaan karakteristik tersebut dapat dibentuk suatu matrik atau deret (Routh *array*) dimana hanya dua baris teratas saja yang ditentukan langsung dari persamaan karakteristiknya.

$$\begin{array}{c|cccccc} s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & 0 \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & 0 \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & & & \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ s^1 & \vdots & & & & & \\ s^0 & h_1 & & & & & \end{array} \quad \rightarrow \quad \text{deret Routh}$$

kolom pertama

dimana :

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

dst sampai nol.

Kemudian :

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

dst sampai semua koofisien didapat sehingga membentuk matrik setengah piramida terbalik.

Syarat kestabilan dari analisa Routh-Hurwitz ini adalah bila semua koofisien dari kolom pertama deret Routh bernilai positif. Bila ada salah satu atau lebih dari koofisien-koofisien tersebut bernilai negatif, maka sistem tersebut tidak stabil. Jumlah akar-akar positif dari persamaan karakteristik sebanding dengan jumlah perubahan tanda (dari positif ke negatif atau sebaliknya) pada kolom pertama tersebut.