# 4

# Analisa Root-Locus

## 4.1. Pendahuluan

Karakteristik dasar tanggapan waktu dari suatu sistem loop tertutup sangat berkaitan dengan lokasi dari pole-pole loop tertutupnya. Pole-pole loop tertutup adalah akar-akar dari persamaan karakteristik dari fungsi alih loop tertutup. Suatu metode yang digunakan untuk memetakan akar-akar dari persamaan karakteristik adalah dengan metode Root-Locus, dimana dengan metode ini akar-akar persamaan karakteristik digambarkan / diplot untuk semua nilai parameter sistem. Penggambarannya tetap pada bidang s, sehingga sangat berguna untuk analisa kestabilan.

## 4.2. Magnitude dan Sudut Persamaan Polinomial s

Diberikan suatu fungsi alih loop tertutup :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Persamaan karakteristik dari fungsi alih tersebut adalah :

1 + G(s)H(s) = 0

atau

G(s)H(s) = -1

maka G(s)H(s) dapat diuraikan menjadi dua komponen :

- Komponen sudut (*angle*) :

  $\angle(G(s)H(s)) = \pm 180^\circ(2k+1)$, untuk k = 0, 1, 2, 3, …

  Catatan :

  Sudut dari (s + $p_k$) untuk nilai s = a + jb dan $p_k$ = c + jd adalah :

  $$\angle[(a+c) + j(b+d)] = \tan^{-1}\frac{b+d}{a+c}$$

- Komponen magnitude :

  |G(s)H(s)| = 1

  Catatan :

  Magnitude dari (s + $p_k$) untuk nilai s = a + jb dan $p_k$ = c + jd adalah :

  $$|(a+c) + j(b+d)| = \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$$

Contoh :

Diberikan persamaan karakteristik :

$$1 + \frac{K(s+z_1)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)(s+p_4)} = 0$$

maka :

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+z_1)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)(s+p_4)}$$

sudut dari G(s)H(s) adalah :

$$\angle[G(s)H(s)] = \phi_1 - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)$$

dimana :

$\phi_1 = \angle(s + z_1)$ dan $\varphi_n = \angle(s + p_n)$

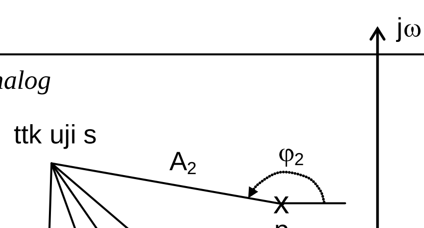
magnitude dari G(s)H(s) :

$$|G(s)H(s)| = \frac{KB_1}{A_1A_2A_3A_4}$$

dimana :

$B_1 = |(s + z_1)|$ dan $A_n = |(s + p_n)|$

Bila digambarkan untuk titik uji s ditunjukkan oleh Gambar 4.1.



Gambar 4.1. Sudut dan Magnitude untuk Titik Uji s

## 4.3. Metode Penggambaran Root-Locus

Agar metode penggambaran root-locus lebih mudah dipahami, diberikan contoh-contoh penggambaran terlebih dahulu sebelum pada akhirnya diberikan generalisasi metode yang dituangkan dalam susunan metode yang rinci.

Contoh 1 :

Diberikan suatu sistem loop tertutup seperti pada Gambar 4.2.
Fungsi alih loop terbuka diberikan oleh persamaan:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \ , \qquad \text{diasumsikan nilai K} \geq 0$$

dan

H(s) = 1

sehingga persamaan karakteristiknya menjadi :

$$G(s) = -1$$

Sudut dari persamaan karakteristik :

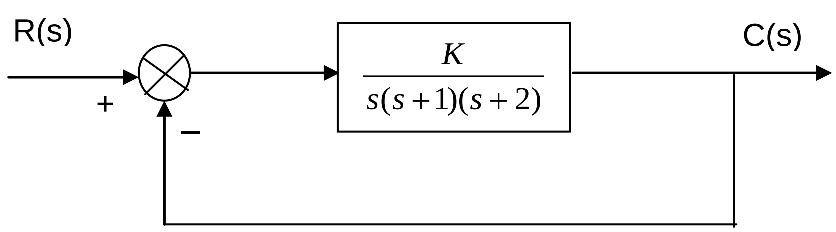
$$\angle[(G(s)] = \pm\, 180^o(2k + 1)\ ,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$-\angle(s) - \angle(s+1) - \angle(s+2) = \pm\, 180^o(2k + 1)\ ,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

dan magnitudenya :

$$|G(s)| = 1$$

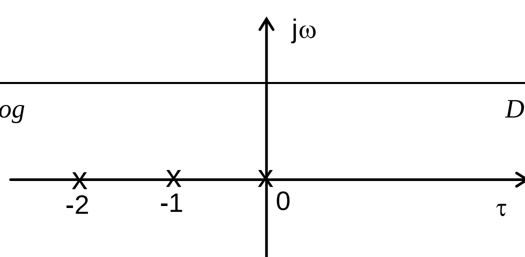
$$\left|\frac{K}{s(s+1)(s+2)}\right| = 1$$




Gambar 4.2. Block Diagram Sistem Loop Tertutup

Penggambaran Root-Locus :

1. Menentukan root-loci pada sumbu real



Gambar 4.3. Penempatan Pole dan Zero

Langkah pertama adalah menempatkan pole-pole loop terbuka (G(s)) yaitu s = 0, s= –1, dan s = –2, serta zero-zero loop terbuka (dalam kasus ini tidak ada) pada bidang s. Perlu diingat bahwa penggambaran pole adalah dengan silang dan penggambaran zero dengan bulatan kecil. Lihat pada Gambar 4.3.

Untuk menentukan root-loci pada sumbu real, digunakan titik uji s :

- Titik uji s pada sumbu real positif, maka :

  $\angle(s) = \angle(s+1) = \angle(s+2) = 0^o$ , sehingga

  $-\angle(s) - \angle(s+1) - \angle(s+2) = 0^o$

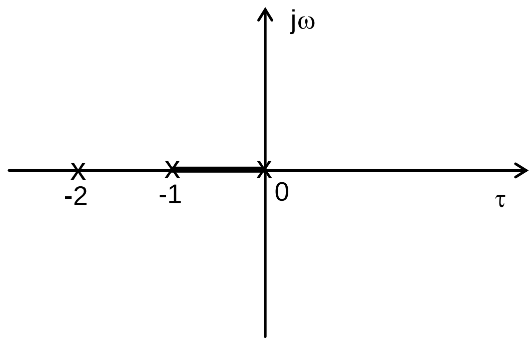
  Dapat dilihat bahwa sudut yang dihasilkan tidak sesuai / tidak memenuhi $\angle G(s) = \pm 180^o(2k + 1)$ , k =0, 1, 2, …, sehingga pada sumbu real positif tidak terdapat root-loci.

- Titik uji s pada sumbu real negatif antara 0 dan –1, maka :

  $\angle(s) = 180^o$ ,  $\angle(s+1) = \angle(s+2) = 0^o$ , sehingga

  $-\angle(s) - \angle(s+1) - \angle(s+2) = -180^o$

sudut yang dihasilkan sesuai / memenuhi $\angle G(s) = \pm\ 180^o(2k + 1)$ , k =0, 1, 2, … (dengan nilai k = 0), sehingga antara pole s = 0 dan s = –1 terdapat root-loci dan merupakan bagian dari root-locus, seperti yang tergambar dalam Gambar 4.4.




Gambar 4.4. Root-Loci Antara Pole s = 0 dan Pole s = –1

- Titik uji s pada sumbu real negatif antara –1 dan –2, maka :

$\angle(s) = \angle(s+1) = 180^o$ , dan $\angle(s+2) = 0^o$ , sehingga

$-\angle(s) - \angle(s+1) - \angle(s+2) = -360^o$

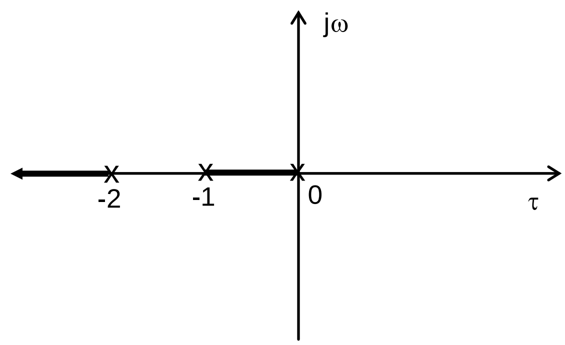
Dapat dilihat bahwa sudut yang dihasilkan tidak sesuai / tidak memenuhi $\angle G(s) = \pm\ 180^o(2k + 1)$ , k =0, 1, 2, …, sehingga pada sumbu real negatif antara pole s = –1 dan s = –2 tidak terdapat root-loci.

- Titik uji s pada sumbu real negatif antara –2 hingga –∞, maka :

$\angle(s) = \angle(s+1) = \angle(s+2) = 180^o$ , sehingga

$-\angle(s) - \angle(s+1) - \angle(s+2) = -540^o$

sudut yang dihasilkan sesuai / memenuhi $\angle G(s) = \pm\ 180^o(2k + 1)$ , k =0, 1, 2, … (dengan nilai k = 1), sehingga antara pole s = –2 hingga –∞ terdapat root-loci dan merupakan bagian dari root-locus. Sekarang kita punya dua buah root-loci, seperti yang tergambar dalam Gambar 4.5.




Gambar 4.5. Root-Loci Antara Pole s = 0 dan Pole s = –1

2. Menentukan asimptot-asimptot dari root-loci

   Jika titik uji dipilih di suatu tempat tak terhingga, maka :

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{s^3}$$

   nilai sudutnya diberikan oleh :

   $-3\angle s = \pm\, 180^{o}(2k + 1)$ , k =0, 1, 2, …

   atau

   sudut-sudut asimptot = $\dfrac{\pm 180^{\circ}(2k+1)}{3}$, untuk k =0, 1, 2, …

   Untuk nilai-nilai k =0, 1, 2, …, didapatkan sudut-sudut perulangan dari tiga sudut saja, yakni $60^{o}$, $-60^{o}$, dan $180^{o}$, yang merupakan sudut-sudut dari garis asimptot terhadap sumbu real bidang s.

   Agar garis asimptot dapat digambarkan, maka harus dicari titik potongnya dengan sumbu real bidang s .

Untuk titik uji di s mendekati tak terhingga, maka persamaan karakteristik dapat dituliskan menjadi:

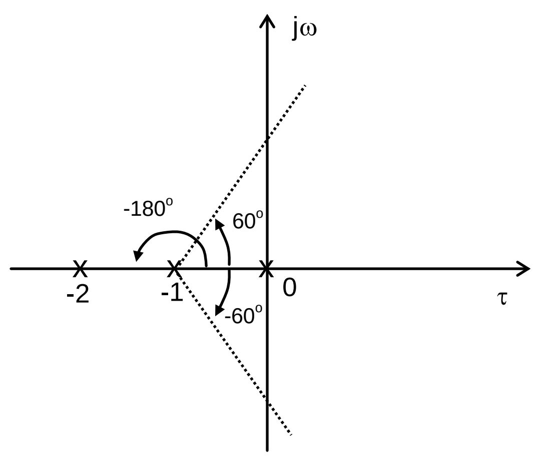
$$G(s) = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + \cdots} = -1$$

$s^3 + 3s^2 + \ldots = -K$

untuk nilai s yang besar, persamaan tersebut dapat didekati dengan persamaan :

$(s + 1)^3 = 0 \rightarrow s = -1$ , merupakan titik potong antara asimptot dan sumbu real bidang s, yaitu pada titik (–1, 0).

Gambar 4.6 memberikan penjelasan terhadap letak asimptot ini.




Gambar 4.6. Garis-Garis Asimptot

3. Menentukan titik break-away

   Bila nilai dari K pada G(s) dinaikkan, maka root-locus akan bergerak berawal dari tiga pole : s = 0, s = –1, dan s = –2.

Dari pole s = –2, root-locus akan bergerak terus ke arah sumbu real negatif.

Dari pole s = –1, root-locus akan bergerak ke arah pole s = 0 hingga suatu saat bertemu dengan root-locus dari pole s = 0 yang pada saat bersamaan juga bergerak ke arah pole s = –1. Titik pertemuan ini disebut titik break-away, karena setelah bertemu di titik ini, root-locus dari pole s = –1 maupun dari s = 0 akan berpisah kembali menuju masing-masing asimptotnya dan akan berhimpitan dengan garis asimptotnya untuk nilai K tak berhingga.

Untuk menentukan titik break-awaynya, digunakan penurunan sebagai berikut :

Dari persamaan karakteristik : $s^3 + 3s^2 + 2s = -K$, didapatkan :

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 6s + 2) = 0 \quad \rightarrow s_1 = -0.4226,\ s_2 = -1.5774$$

Nilai-nilai $s_1$ dan $s_2$ adalah nilai-nilai yang mungkin untuk menjadi titik break-away. Akan tetapi mengingat titik break-away harus berada antara s = 0 dan s = –1, maka dipilih titik break-awaynya berada pada s = –0.4226.

4. Menentukan titik-titik di mana root-locus memotong sumbu imajiner

   Untuk keperluan ini, digunakan kriteria stabilitas Routh-Hurwitz :

   PK : $s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$

   Deret Routh-nya :

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & \dfrac{6-K}{3} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

$s^2$ row $\longrightarrow$ bagian $s^2$

$s^1$ row $\longrightarrow$ bagian $s^1$

Nilai K yang membuat bagian $s^1$ pada kolom pertama bernilai nol adalah K = 6. Titik potong pada sumbu imajiner dapat dihitung dengan memecahkan persamaan pada bagian $s^2$ dengan nilai K = 6 :

$3s^2 + K = 0$

$3s^2 + 6 = 0 \rightarrow s^2 = -2$

maka $s_1 = j\sqrt{2}$ dan $s_2 = -j\sqrt{2}$ merupakan titik potong pada sumbu imajiner, yaitu pada titik $(0, j\sqrt{2})$ dan titik $(0, -j\sqrt{2})$.

Cara lain adalah dengan mengganti s pada persamaan karakteristik dengan $j\omega$ :

PK : $s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$

$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + K = 0$

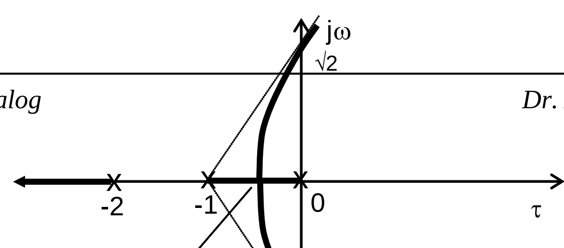
$(K - 3\omega^2) + j(2\omega - \omega^3) = 0$

| | |
|---|---|
| $K - 3\omega^2 = 0$ | $2\omega - \omega^3 = 0$ |
| $\omega = \pm\sqrt{2}$ | $\omega = 0$ |
| $K = 6$ | $K = 0$ |

Titik potong root-locus dengan sumbu imajiner adalah $(0, j\sqrt{2})$, $(0, -j\sqrt{2})$, dan (0, 0).

5. Menggambarkan root-locus secara lengkap

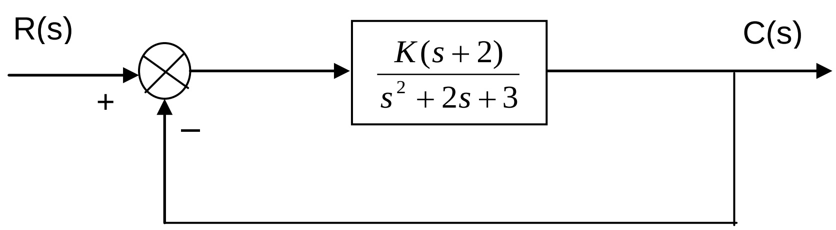
   Gambar 4.7 menggambarkan root-locus lengkap dari urut-urutan langkah 1 hingga 4.



Gambar 4.7. Root-Locus Lengkap Contoh 1

Contoh 2 :

Diberikan suatu sistem loop tertutup seperti pada Gambar 4.8.




Gambar 4.8. Block Diagram Sistem Loop Tertutup

Fungsi alih loop terbuka diberikan oleh persamaan:

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s^2+2s+3} \quad , \qquad \text{diasumsikan nilai K} \geq 0$$

dan

H(s) = 1

sehingga persamaan karakteristiknya menjadi :

G(s) = –1

Pole-pole dan zero dari fungsi alih loop terbuka adalah :

pole-pole : $s_1 = -1 + j\sqrt{2}$ dan $s_2 = -1 - j\sqrt{2}$

zero : $s = -2$

sehingga fungsi alih loop terbuka dapat disusun ulang menjadi :

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{(s+1-j\sqrt{2})(s+1+j\sqrt{2})}$$

Sudut dari persamaan karakteristik :

$$\angle[(G(s)] = \pm\, 180^o(2k+1)\ ,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\angle(s+2) - \angle(s+1-j\sqrt{2}) - \angle(s+1+j\sqrt{2}) = \pm\, 180^o(2k+1)\ ,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

dan magnitudenya :

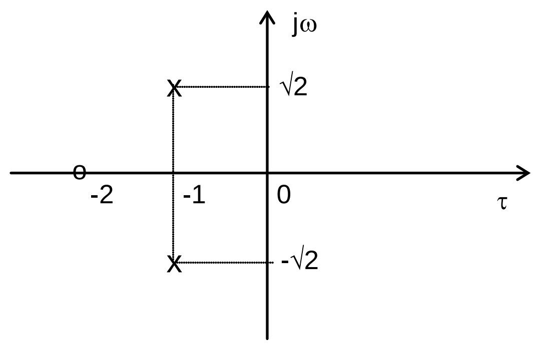
$$|G(s)| = 1$$

$$\left|\frac{K(s+2)}{(s+1-j\sqrt{2})(s+1+j\sqrt{2})}\right| = 1$$

Penggambaran Root-Locus :

1. Menentukan root-loci pada sumbu real

Langkah pertama adalah menempatkan pole-pole loop terbuka (G(s)) yaitu s = –1 + $j\sqrt{2}$ dan s = –1 – $j\sqrt{2}$, serta zero loop terbuka yaitu s = –2 pada bidang s. Lihat pada Gambar 4.9.




Gambar 4.9. Penempatan Pole dan Zero

Pada sumbu real, penjumlahan sudut pada pole s = –1 + $j\sqrt{2}$ dan pole s = –1 – $j\sqrt{2}$ selalu nol (karena merupakan konjugate), sehingga yang perlu diperhatikan hanyalah sudut dari zero s = –2 terhadap titik uji.

Untuk menentukan root-loci pada sumbu real, digunakan titik uji s :

- Titik uji s pada sumbu real antara zero s = –2 hingga positif tak terhingga, maka :

  $\angle(s+2) = 0^o$

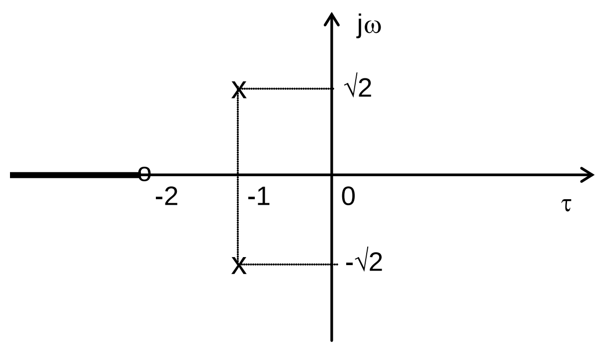
  Dapat dilihat bahwa sudut yang dihasilkan tidak sesuai / tidak memenuhi $\angle G(s) = \pm 180^o(2k + 1)$ , k =0, 1, 2, …, sehingga pada daerah ini tidak terdapat root-loci.

- Titik uji s pada sumbu real antara zero s = –2 hingga negatif tak terhingga, maka :

  $\angle(s+2) = -180^o$

Dapat dilihat bahwa sudut yang dihasilkan sesuai / memenuhi $\angle G(s) = \pm 180^o(2k + 1)$ , k =0, 1, 2, …, sehingga pada daerah ini terdapat root-loci.

Gambar 4.10. memberikan penjelasan mengenai letak root-loci pada sumbu real bidang s.




Gambar 4.10. Letak Root-Loci pada Sumbu Real

2. Menentukan asimptot-asimptot dari root-loci

Karena persamaan karakteristik memiliki dua buah pole dan sebuah zero, maka hanya ada satu asimptot yaitu sumbu real negatif. Jumlah asimptot yang ada adalah selisih jumlah pole dan zero yang terdapat pada persamaan karakteristik. Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut :

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_{m-1})(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_{m-1})(s+p_n)} = \lim_{s\to\infty} \frac{s^m}{s^n}$$

nilai sudutnya diberikan oleh :

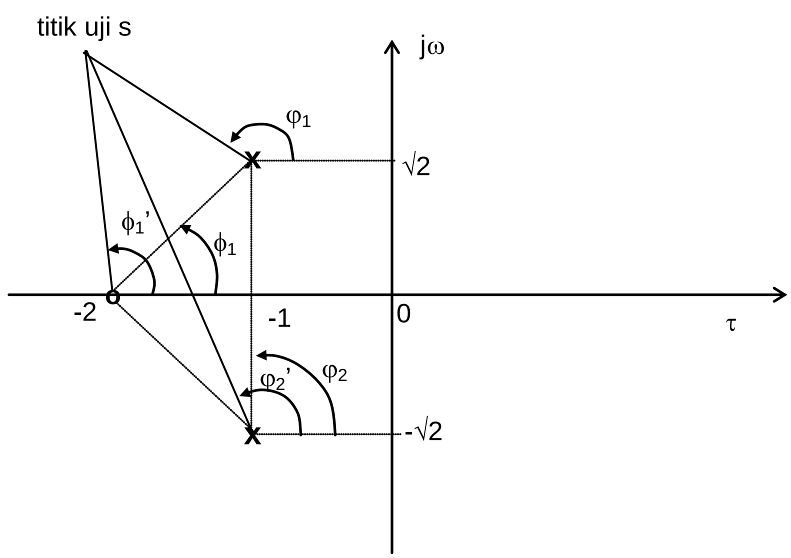
$$m\angle s - n\angle s = \pm 180^o(2k + 1) \text{ , } k = 0, 1, 2, \ldots$$

atau, sudut-sudut asimptot = $\dfrac{\pm 180^\circ (2k+1)}{m-n}$, untuk k = 0, 1, 2, …

Untuk nilai k = 0, 1, 2, … , maka akan terjadi pengulangan sudut-sudut hingga hanya |(m – n)| buah sudut saja yang berlaku untuk persamaan sudut tersebut. Nilai |(m – n)| artinya selisih dari jumlah pole dan jumlah zero dalam fungsi alih loop terbuka. Jumlah sudut yang terjadi juga merepresentasikan jumlah asimptot dari root-loci.

3. Menentukan sudut keberangkatan (*angle of departure*) dari pole-pole loop terbuka konjugate-kompleks

Sudut keberangkatan adalah sudut yang terbentuk antara sumbu real dengan garis singgung terhadap root-loci yang mulai / berangkat dari pole-pole menuju zero. Untuk mencari sudut keberangkatan ini, digunakan titik uji s sebagaimana terlihat pada Gambar 4.11.




Gambar 4.11. Titik Uji s untuk Mendapatkan Sudut Keberangkatan (*Angle of Departure*)

Pada titik uji s :

$$\sum sudut = \pm 180^\circ(2k+1)$$

$\phi_1' - (\varphi_1 + \varphi_2') = 180^o$

$\varphi_1 = 180^o - \varphi_2' + \phi_1'$

Bila titik uji ini dekat sekali dengan titik pole s = –1 + $j\sqrt{2}$ (pilihan ini didasari pemikiran bahwa untuk mengukur sudut keberangkatan, maka titik uji yang kita jadikan referensi haruslah dekat sekali dengan titik awal keberangkatannya) , maka $\varphi_2' = \varphi_2$ dan $\phi_1' = \phi_1$, sehingga :

$\varphi_1 = 180^o - \varphi_2 + \phi_1$

$\varphi_1 = 180^o - 90^o + \phi_1$

Nilai $\phi_1$ dapat dihitung dengan persamaan trigonometri sederhana :

$\tan \phi_1 = \sqrt{2}$

$\phi_1 = 55^o$

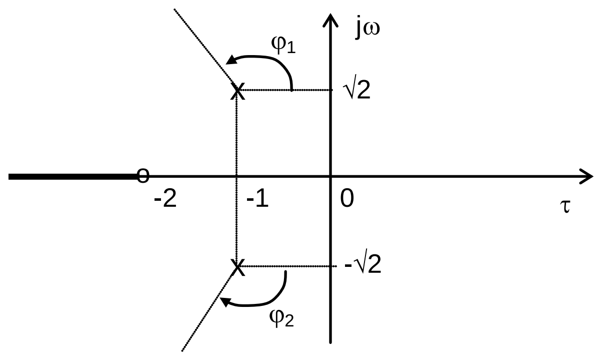
sehingga :

$\varphi_1 = 180^o - 90^o + 55^o$

$\varphi_1 = 145^o$

Sudut $\varphi_1$ adalah sudut keberangkatan root-loci yang akan keluar dari pole s = –1 + $j\sqrt{2}$ menuju zero s = –2. Dengan cara yang sama sudut keberangkatan pada pole s = –1 – $j\sqrt{2}$ juga dapat dihitung, dimana nilai $\varphi_2$ (sudut keberangkatannya) sama dengan 215$^o$ atau –145$^o$.

Gambar 4.12 menunjukkan sudut keberangkatan masing-masing root-loci yang keluar dari pole-pole konjugate-kompleks.




Gambar 4.12. Sudut Keberangkatan Root-Locus
dari Pole 1 dan Pole 2

4. Menentukan titik break-in

Root-loci akan bergerak dari pole-pole menuju ke zero. Demikian pula root-loci dari pole 1 dan pole 2. Keduanya bergerak menuju zero s = –2 secara bersamaan dan suatu ketika akan bertemu di suatu titik pada sumbu real sebelum akhirnya bergerak secara bersamaan menuju zero. Titik temu ini disebut titik break-in. Cara memperolehnya sama dengan cara memperoleh titik break-away :

Dari persamaan karakteristik diperoleh :

$$K = -\frac{s^2 + 2s + 3}{s + 2}$$

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(2s+2)(s+2) - (s^2 + 2s + 3)}{(s+2)^2} = 0$$

$s^2 + 4s + 1 = 0$

$s_1 = -3.7320$ atau $s_2 = -0.2680$

Karena titik break-in harus berada antara s = –2 dan s = –∞, maka titik break-in yang digunakan adalah s = –3.7320.

5. Menggambar root-locus

Untuk sketsa root-locus antara pole-pole dan break-in, bisa dengan dua cara :

- Cara I : dengan coba-coba titik uji s (*trial and error*)

  Dengan menggunakan persamaan jumlah sudut dari zero dan pole untuk tiap titik uji, akan didapatkan nilai-nilai titik uji yang bersesuaian dengan persamaan tersebut.

  $$\angle(s+2) - \angle(s+1-j\sqrt{2}) - \angle(s+1+j\sqrt{2}) = \pm 180^o(2k+1)\ ,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

  Nilai-nilai titik uji s dimasukkan dan diselidiki apakah memenuhi persamaan di atas atau tidak. Bila memenuhi maka titik uji tersebut pasti dilewati oleh root-locus. Dengan melakukan beberapa kali pengujian, maka sketsa root-locus antara pole-pole dan titik break-in dapat diperkirakan.

- Cara II : menurunkan persamaan grafiknya

  Persamaan grafik sketsa root-locus dari pole-pole menuju ke titik break-in diturunkan sebagai berikut :

  $$\angle(s+2) - \angle(s+1-j\sqrt{2}) - \angle(s+1+j\sqrt{2}) = \pm 180^o(2k+1)\ ,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

  untuk $s = \tau + j\omega$,

  $$\angle(\tau + j\omega + 2) - \angle(\tau + j\omega + 1 - j\sqrt{2}) - \angle(\tau + j\omega + 1 + j\sqrt{2}) = \pm 180^o(2k+1)$$

$$\tan^{-1}\left[\frac{\omega}{\tau+2}\right]-\tan^{-1}\left[\frac{\omega-\sqrt{2}}{\tau+1}\right]-\tan^{-1}\left[\frac{\omega+\sqrt{2}}{\tau+1}\right]=\pm 180^{\circ}(2k+1)$$

dengan menggunakan rumus :

$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x.\tan y},$$ maka

persamaan di atas dapat diubah dalam bentuk :

$$\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega-\sqrt{2}}{\tau+1}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\omega+\sqrt{2}}{\tau+1}\right)\right]=\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\tau+2}\right)\pm 180^{\circ}(2k+1)\right]$$

atau

$$\frac{\dfrac{\omega-\sqrt{2}}{\tau+1}+\dfrac{\omega+\sqrt{2}}{\tau+1}}{1-\left(\dfrac{\omega-\sqrt{2}}{\tau+1}\right)\left(\dfrac{\omega+\sqrt{2}}{\tau+1}\right)}=\frac{\dfrac{\omega}{\tau+2}\pm 0}{1\mp\dfrac{\omega}{\tau+2}.(0)}$$

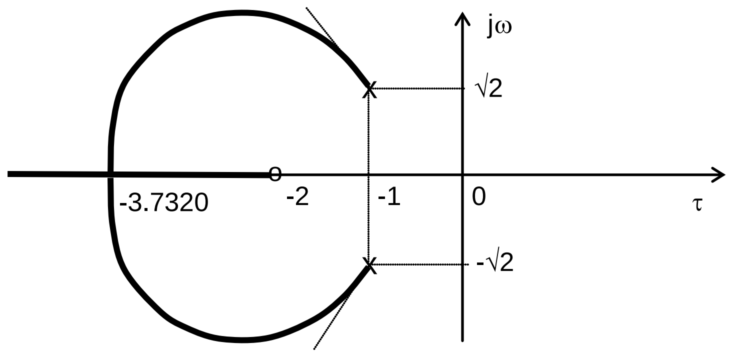
$$\frac{2\omega(\tau+1)}{(\tau+1)^2-(\omega^2-2)}=\frac{\omega}{\tau+2}$$

$$\omega\left[(\tau+2)^2+\omega^2-3\right]=0$$

$$\omega=0$$

$$(\tau+2)^2+\omega^2-3=0 \quad\rightarrow\quad (\tau+2)^2+\omega^2=\sqrt{3} \quad\rightarrow \text{ persamaan lingkaran}$$

Gambar dari root-locus secara keseluruhan diberikan oleh Gambar 4.13.




Gambar 4.13. Root-Locus Lengkap Contoh 2

Dari kedua contoh di atas, dapat ditarik kesimpulan generalisasi metode penggambaran root-locus sebagaimana berikut ini :

1. Meletakkan pole-pole dan zero-zero dari G(s)H(s) pada bidang s. Root-loci akan bergerak dari pole-pole menuju ke zero (baik itu zero tertentu maupun zero tak terhingga).
2. Mencari root-loci yang berada pada sumbu real bidang s dengan jalan memberikan titik uji di antara pole dan zero yang berada pada sumbu real tersebut.
3. Menentukan asimptot-asimptot dari root-loci, dimana jumlah asimptot yang harus ada ekivalen dengan selisih banyaknya pole dan zero dalam fungsi alih loop terbuka.
4. Mencari titik break-away dan titik break-in.
5. Menentukan sudut keberangkatan bagi pole dan sudut kedatangan bagi zero yang terletak dalam bidang kompleks.
6. Mencari titik perpotongan antara root-loci dengan sumbu imajiner.
7. Mencoba beberapa titik uji untuk tempat-tempat yang berbeda di sekitar root-loci yang sudah ada (atau dekat pole dan zero) untuk mencari sketsa root-locus yang lain.

**Hubungan Root-Locus dengan $\omega_n$ dan $\zeta$**

Bila diberikan suatu sistem kontrol loop tertutup, maka nilai-nilai $\omega_n$ dan $\zeta$ dapat dicari berdasarkan letak pole-pole loop tertutupnya seperti yang terlihat pada Gambar 4.14

Misalkan pole loop tertutupnya berada pada s = a + jb, maka :

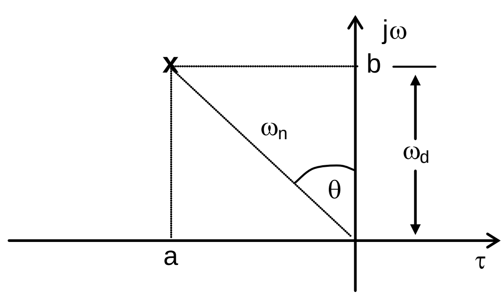
$\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\omega_d = b$

$\zeta = \sin\theta$, dimana $\theta = \sin^{-1}(a/\omega_n)$

atau

$\zeta = |a/\omega_n|$




Gambar 4.14. Nilai-Nilai $\zeta$ dan $\omega_n$ pada Root-Locus

## 4.3. Penggambaran Root-Contour

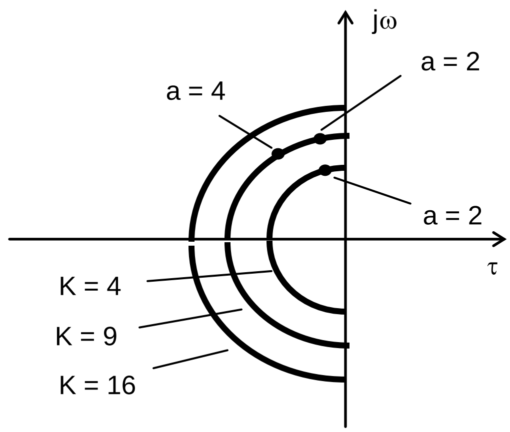
Bila suatu sistem memiliki dua atau lebih parameter yang bisa diubah-ubah, maka penggambaran root-locusnya dilakukan dengan cara *root-locus plot*.

Contoh :

Untuk sistem :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + as + K}$$

maka root-contournya ditunjukkan oleh Gambar 4.15.




Gambar 4.15. Sketsa Root-Contour