Eigenvector dan eigenvalues

- Pengertian

  Sebuah matriks bujur sangkar dengan orde n x n misalkan A, dan sebuah vektor kolom X. Vektor X adalah vektor dalam ruang Euklidian R^n yang dihubungkan dengan sebuah persamaan:

  $$AX = \lambda X \qquad (7.1)$$

  Dimana λ adalah suatu skalar dan X adalah vektor yang tidak nol Skalar λ dinamakan nilai Eigen dari matriks A. Nilai eigen adalah nilai karakteristik dari suatu matriks bujur sangkar. Vektor X dalam persamaan (7.1) adalah suatu vektor yang tidak nol yang memenuhi persamaan (7.1) untuk nilai eigen yang sesuai dan disebut dengan vektor eigen. Jadi vektor X mempunyai nilai tertentu untuk nilai eigen tertentu.

- Perhitungan eigenvalues

  Kita tinjau perkalian matriks A dan X dalam persamaan (7.1) apabila kedua sisi dalam persamaan tersebut dikalikan dengan matriks identitas didapatkan:

  $$IAX = I\lambda X$$

  $$AX = \lambda IX$$

  $$[\lambda I - A]X = 0 \qquad (7.2)$$

  Persamaan (7.2) terpenuhi jika dan hanya jika:

  $$\det\,[\lambda I - A] \qquad (7.3)$$

  Dengan menyelesaikan persamaan (7.3) dapat ditentukan nilai eigen (λ) dari sebuah matriks bujur sangkar A tersebut.

- Perhitungan eigenvector

  Kita tinjau kembali persamaan $AX = \lambda X$ dimana A adalah matriks bujur sangkar dan X adalah vektor bukan nol yang memenuhi persamaan tersebut. Dalam subbab 7.1 telah dibahas tentang perhitungan nilai eigen dari matriks A(λ), pada subbab ini kita bahas vektor yang memenuhi persamaan tersebut yang disebut vektor eigen(vektor karakteristik) yang sesuai untuk nilai eigennya.

Kita tinjau sebuah matriks bujur sangkar orde 2 x 2 berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Persamaan $AX = \lambda X$ dapat dituliskan:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (7.4)$$

Persamaan (7.4) dikalikan dengan identitas didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad (7.5)$$

Persamaan (7.5) dalam bentuk sistem persamaan linier dituliskan:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (7.6)$$

Persamaan (7.6) adalah sistem persamaan linier homogen, vektor dalam ruang R^n yang tidak nol didapatkan jika dan hanya jika persamaan tersebut mempunyai solusi non trivial untuk nilai eigen yang sesuai.

Contoh soal:

1. Misalkan Sebuah vektor $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan sebuah matriks bujur sangkar orde 2 x 2 $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, Apabila matriks A dikalikan dengan X maka:

   $$AX = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0 \\ 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

   Dimana:

   $$\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda X$$

   Dengan konstanta $\lambda = 4$ dan

   $$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   Memenuhi persamaan (7.1). Konstanta $\lambda = 4$ dikatakan nilai eigen dari matriks bujur sangkar $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

2. Dapatkan nilai eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

   Jawab:

   Dari persamaan (7.3) maka:

   $$\det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 3 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = 0$$

   $$(\lambda - 2)(\lambda - 2) - 3 = 0$$

   $$\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 3 = 0$$

   $$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

Dengan menggunakan rumus abc didapatkan:

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.1}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{3}$$

Maka penyelesaian adalah: $\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}$ dan $\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$.

Nilai eigen matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ adalah:

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{3} \quad \text{dan} \quad \lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$$

3. Dapatkan nilai eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

Jawab:

Nilai eigen ditentukan dengan persamaan:

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 4 & 1 \\ 1 & \lambda - 5 \end{bmatrix} = 0$$

maka:

$$(\lambda - 4)(\lambda - 5) - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 9\lambda + 20 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 9\lambda + 19 = 0$$

Dengan rumus abc didapatkan:

$$\lambda_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4.1.19}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 76}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Didapatkan $\lambda_1 = 4{,}5 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ dan $\lambda_2 = 4{,}5 - \frac{1}{2}\sqrt{5}$, jadi nilai eigen matriks

A = $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ adalah $\lambda = 4{,}5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

4. Tentukan vector eigen dari matriks berikut:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Jawab:

- Nilai eigen dari matriks A adalah

A x = λ x

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ x = λ x

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ x = $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ x

$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ x - $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ x = 0

$\begin{pmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ x = 0

Maka polynomial karakteristik A adalah :

Det (λI – A) = 0

{(λ-3) . λ} – (- 2.1) = 0

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$

$\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$ (nilai eigen valuenya)

- Sekarang tentukan nilai vektornya yaitu : sebuah vector tak 0 yang memenuhi persamaan $Ax = \lambda x$.
  - Untuk nilai eigen $\lambda = 1$

    $Ax = \lambda x$

    $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x = \lambda\, x$

    $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

    $\begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

    $\begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 - x_1 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = 0$

    Maka di dapat persamaan :

    $3x_1 + 2x_2 - x_1 = 0$

    $-x_1 - x_2 = 0$

    Dan jika diselesaikan maka :

    $2x_1 + 2x_2 = 0$ artinya $x_1 = - x_2$

    $-x_1 - x_2 = 0$ artinya $x_1 = - x_2$

    Jika $x_2 = k$ (merupakan konstanta sembarang)

    Maka di dapat

    $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ k \end{pmatrix}$

  - Untuk nilai eigen $\lambda = 2$

$Ax = \lambda x$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x = \lambda\, x$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 - 2x_1 \\ -x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = 0$

Maka di dapat persamaan :

$3x_1 + 2x_2 – 2x_1 = 0$

$-x_1 – 2x_2 = 0$

Dan jika diselesaikan maka :

$x_1 + 2x_2 = 0$ artinya $x_1 = - 2x_2$

$-x_1 – 2x_2 = 0$ artinya $x_1 = - 2x_2$

Jika $x_2 = k$ (merupakan konstanta sembarang)

Maka di dapat

X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k \\ k \end{pmatrix}$

Linear Algebra

Generalized Inverses

Misalkan matriks $A = (a_{ij})$ □ C_{nxm} . Sebuah matriks $X = (x_{ij})$ □ C_{nxm} dikatakan sebagai *generalized* atau *pseudo* invers dari matriks A jika X memenuhi satu atau lebih dari sifat-sifat berikut:

(i) AXA = A

(ii) XAX = X

(iii) $(AX)_H = AX$ (6.10)

(iv) $(XA)_H = XA$

Disini $A_H = (A)_T$! *conjugate transpose* dari matriks A. Jika elemen-elemen dari matriks A □ □ maka $A_H = A_T$ (A_H dibaca A- Hermitian)

Jika X memenuhi persamaan (6.10) maka X disebut sebagai satu-invers (*one invers*) yang secara umum tidak tunggal.

Jika X adalah satu-invers , maka seluruh satu-invers yang lain dari matriks A adalah :

Satu-invers X adalah tunggal jika dan hanya jika matriks A adalah matriks bujur sangkar

nonsingular.

Matriks X dikatakan sebagi *Moore-Penrose Generalized Invers* dari matriks A jika dan

hanya jika matriks X memenuhi keempat sifat yang diberikan pada persamaan (6.10) dan

dinotasikan dengan A_+

Contoh matriks A* (A^H)

If

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3+i & 5 & -2i \\ 2-2i & i & -7-13i \end{bmatrix}$$

then

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 3-i & 2+2i \\ 5 & -i \\ 2i & -7+13i \end{bmatrix}$$

Teorema 1 pada generalized inverse pada matriks mempunyai 4 persamaan:

1. BAB = B

2. ABA = A

3. $(BA)^H$ = BA

4. $(AB)^H$ = AB

Matriks B disebut pseudo-invers atau invers matriks tergeneralisasi dari A.

Contoh:

Teorema 1

Diberikan A sembarang matriks berukuran mxn, maka terdapat invers matriks tunggal tergeneralisasi dari A berukuran nxm.

Bukti:

Jika X,Y adalah invers matrik tergenerasliasi dari A, maka X, Y memenuhi keempat sifat pada teorema 1. Sehingga berlaku:

AY = (AXA)Y= (AX)(AY)

Karena AX dan AY matriks Hermitian dengan sifar nomer 4, di peroleh:

$AY = ((AX(AY))^H$

$= (AY)^H(AX)^H$

$= (AY)(AX)$

$= (AYA)X$

$= AX$

Dengan cara yang sama didapatkan YA= XA. Berikutnya AY= AX dikalikan dengan Y dari kiri, didapatkan Y = YAY = YAX

Selanjutnya YA =XA dikalikan matriks X dari kanan, didapatkan :

YAX = XAX = X

Jadi Y = YAX = X

Terbukti vahwa X= Y, artinya invers A tunggal.

TEORI

SUBSPACE

Di dalam matematika, sebuah *subspace* merupakan *vector space* yang berada di dalam *vector space* lain. Jadi, setiap *subspace* adalah *vector space* yang berada dalam *subspace* itu sendiri atau bisa juga merupakan *vector space* yang ada di dalam *vector space* lain (yang lebih besar).

Dimisalkan ada dua buah *vector space*, yaitu V dan W yang keduanya memiliki bagian *vector* dan bagian skalar. Dimisalkan bahwa W merupakan *subspace* dari V, dengan $W \subseteq V$. Apabila V adalah *vector space* yang didefinisikan C^4, melalui sebuah matriks berbentuk 4x4, maka sudah jelas bahwa $W \subseteq V$ apabila objek dari W adalah vektor kolom yang berjumlah 4.

INVARIANT SUBSPACE

Invariant subspace merupakan suatu istilah yang ditujukan pada sebuah *subspace*, yang apabila ada transformasi linier

$T : V \rightarrow V$

Kemudian $W \leq V$, λ adalah eigenvalue dari sebuah transformasi T, v adalah eigenvector yang koresponden / sesuai dengan λ tsb, kemudian $Tv=\lambda v$, sehingga T(w) terletak di dalam *subspace* W. Atau dengan kata lain, W merupakan sebuah *subspace* yang memiliki sifat invariant terhadap transformasi T. Atau bisa disebut juga bahwa W adalah *T-invariant subspace.*

Perhatian :

T : transformasi linier, contoh T(x)=Ax.

V : *vektor space* yang mengalami transformasi T, bisa berbentuk himpunan ataupun matriks

W : *subspace* dari V, bisa berbentuk himpunan atau matriks

X : eigenvector dari sebuah matriks persegi, biasanya berbentuk matriks λ : eigenvalue dari sebuah matriks persegi, biasanya berbentuk konstanta

Contoh soal:

1. Transformasi linear dari T: C^4—> C^4 didefinisikan sebagai T(x)=Ax.

Dimana A=

```
A =

    -8     6   -15     9
    -8    14   -10    18
     1     1     3     0
     3    -8     2   -11
```

Dan w1 dan w2:

```
w1 =          w2 =

    -7            -1
    -2            -2
     3             0
     0             1
```

Dan himpunan W={w1,w2}. Kita akan periksa apakah W merupakan invariant subspace dari C^4 dengan T. Dari definisi W, setiap vector yang dipilih dari W dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari w1 dan w2. Anggap w ϵ W, berikut penjelasan untuk pemeriksaannya.

T(w) = T(a1*w1+a2*w2)

= a1* T(w1)+ a2*T(w2)

$$\begin{bmatrix} -8 & 6 & -15 & 9 \\ -8 & 14 & -10 & 18 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -8 & 2 & -11 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=a1*\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a2*\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

=a1*w2+a2*((-1)w1++2w2)

=(-a2)*w1+(a1+2a2)*w2 ϵ W

Oleh karena itu berdasarkan definisi dari invariant subspace maka W merupakan invariant subspace dari C^4 dengan T.

2. Dan x1 dan x2:

```
x1 =            x2 =

     2               3
     3               6
     4               2
     6               8
```

Dan himpunan X={x1,x2}. Kita akan periksa apakah X merupakan invariant subspace dari C^4 dengan T. Dari definisi X, setiap vector yang dipilih dari X dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari x1 dan x2. Berikut penjelasan untuk pemeriksaan apakah X merupakan invariant subspace dari C^4 atau tidak.

T(w) = T(b1*x1+b2*x2)

= b1* T(x1)+ b2*T(x2)

$$=b1*\begin{matrix} -4 \\ 94 \\ 17 \\ -76 \end{matrix} + b2*\begin{matrix} 54 \\ 184 \\ 15 \\ -123 \end{matrix}$$

=a1*(-11,7*x1+8,1*x2)+a2*(-28,57*x1+22,98*x2)

=-(11,7*a1+28,57*a2)*x1+(8,1*a1+22,98*a2)*x2 ϵ X

Oleh karena itu berdasarkan definisi dari invariant subspace maka X merupakan invariant subspace dari C^4 dengan T.

Linear Subspaces (Sub Ruang Linier)

1. Pembuka

Dalam tulisan ini sedikit menyinggung tentang beberapa istilah dalam aljabar linier yang perlu dimengerti sebelum belajar kontrol robust. Beberapa istilah lain ada di tulisan lain untuk melengkapi tulisan ini. Selain belajar dari tulisan ini, diharapkan peserta kuliah juga aktif menelusuri lebih dalam tentang aljabar linier di beberapa referensi buku yang disodorkan agar peserta bisa lebih memahami tentang istilah-istilah yang di tulis disini yang nantinya akan mempengaruhi pemahaman kita saat belajar kontrol robust.

Dalam tulisan ini akan di jelaskan seperti apa sub ruang vektor (Subspace), kombinasi linier suatu vektor, span, kebebasan linier, basis dan dimensi yang mana seluruhnya saling berhubungan. Selain itu juga akan disinggung mengenai vektor yang ortogonal, ortonormal, kernel, image, dan trace.

2. Subruang

Jika diketahui V adalah ruang vektor dan U adalah sub himpunan V, maka U dikatakan sub ruang dari V jika memenuhi dua syarat:

- Jika $\bar{p}, \bar{q}$ ϵ U maka $\bar{p}$ + $\bar{q}$ ϵ U (syarat penjumlahan)
- Jika $\bar{p}$ ϵ U maka untuk skalar k berlaku k$\bar{p}$ ϵ U (syarat perkalian)

Untuk lebih memahami pernyataan di atas kita bisa perhatikan contoh di bawah ini:

2.1. jika U= $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$ adalah sub himpunan R^2 maka tunjukanlah apakah U subruang R^2 ?

Kita uji U dengan 2 syarat diatas:

#Syarat penjumlahan

misal $\bar{p}$ = $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\bar{q} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ dimana kita tahu bahwa $\bar{p}, \bar{q}$ ϵ U maka

$\bar{p}$ + $\bar{q}$ = $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$= $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\bar{p}$ + $\bar{q}$= $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ ϵ U, berapapun nilai x pada $\bar{p}$, $\bar{q}$ ϵ U akan tetap mengakibatkan $\bar{p}$ + $\bar{q}$ sebagai anggota U (Syarat penjumlahan terpenuhi)

#Syarat perkalian

misal $\bar{p}$ = $\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$, maka k$\bar{p}$ ϵ U dengan k skalar. Berapapun nilai k dan berapapun nilai x yang ada pada $\bar{p}$, k$\bar{p}$ tetap akan berada dalam himpunan U (syarat perkalian terpenuhi)

karena dua syarat di atas terpenuhi maka U adalah subruang dari R^2

2.2. jika U= $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ dan x ≥0 , dan U adalah sub himpunan R^2 maka tunjukanlah apakah U subruang R^2 ?

Kembali kita uji U dengan 2 syarat diatas:

#Syarat penjumlahan

misal $\bar{p}$ = $\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ dan $\bar{q} = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$ dimana kita tahu bahwa $\bar{p}$, $\bar{q}$ ϵ U maka

$\bar{p}$ + $\bar{q}$ = $\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$= $\begin{bmatrix}5\\10\end{bmatrix}$

$\bar{p}$ + $\bar{q}$= $\begin{bmatrix}5\\10\end{bmatrix}$ ϵ U, berapapun nilai x asalkan x≥0 dan berapapun nilai y pada $\bar{p}$, $\bar{q}$ ϵ U akan tetap mengakibatkan $\bar{p}$ + $\bar{q}$ sebagai anggota U (Syarat penjumlahan terpenuhi)

#Syarat perkalian

misal $\bar{p}$ = $\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$, maka ada nilai k yang tidak dapat memenuhi syarat k$\bar{p}$ ϵ U yaitu ketika k ≤ 0 . misalkan k = -1 maka k$\bar{p}$ = $\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$, padahal nilai x harus ≥0 agar tetap berada di dalam anggota U. (syarat perkalian tidak terpenuhi)

karena ada syarat yang tidak terpenuhi maka U bukanlah subruang dari R^2

3. Kombinasi Linier dan Span

- Jika U= { $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots\ldots \overline{x_n}$ } maka $\bar{u}$ = $k_1.\overline{x_1} + k_2.\overline{x_2} + \ldots k_n.\overline{x_n}$ bisa disebut **kombinasi linier** dari U
- Jika U= { $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots\ldots \overline{x_n}$ }, maka **Span**{U} adalah semua kombinasi linier yang mungkin terjadi dari U
- jika V adalah ruang Vektor dan U adalah Sub himpunan dari V maka Span{U} bisa dikatakan sebagai subruang dari V, atau secara matematis Span{U}= Subruang V jika U adalah subruang V

berikut ini adalah contoh soal untuk memperjelas pernyataan di atas:

3.1. jika U={$\bar{p}, \bar{q}$} = {$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$} dan U adalah sub himpunan R^2 maka tunjukanlah , tunjukanlah bahwa span{U} adalah subruang R^2 ?

misal $\bar{p}$=$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\bar{q}$=$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, maka span{$\bar{p}, \bar{q}$} adalah:

span{$\bar{p}, \bar{q}$} adalah kombinasi linier yang mungkin terjadi dari {$\bar{p}, \bar{q}$} , maka katakanlah

$\bar{u} =$ span{$\bar{p}, \bar{q}$}

$$\bar{u} = k_1.\bar{p} + k_2.\bar{q} = k_1.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2.\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + 4k_2 \\ 2k_1 + 3k_2 \end{bmatrix}$$

Untuk mengujinya dengan 2 syarat sub ruang, maka kita definisikan lagi $\bar{v}$ sebagai kombinasi linier yang lain dari U, maka

$\bar{v} =$ span{$\bar{p}, \bar{q}$}

$$\bar{v} = m_1.\bar{p} + m_2.\bar{q} = m_1.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + m_2.\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 + 4m_2 \\ 2m_1 + 3m_2 \end{bmatrix}$$

Jika kita masukan nilai k_1, k_2, m_1, dan m_2 ke dalam $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ maka $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ akan tetap menjadi anggota himpunan U, selanjutnya adalah pengujian terhadap syarat subruang :

#syarat penjumlahan

$$\bar{u} + \bar{v} = \begin{bmatrix} k_1 + 4k_2 \\ 2k_1 + 3k_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 + 4m_2 \\ 2m_1 + 3m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + 4k_2 + m_1 + 4m_2 \\ 2k_1 + 3k_2 + 2m_1 + 3m_2 \end{bmatrix}$$

Berapapun nilai k_1, k_2, m_1, dan m_2, $\bar{u} + \bar{v}$ tetap anggota himpunan U (syarat penjumlahan)

#Syarat perkalian

$\bar{u}$ = $\begin{bmatrix} k_1 + 4k_2 \\ 2k_1 + 3k_2 \end{bmatrix}$, maka $c\bar{u} \in$ U dengan C skalar. Berapapun nilai c serta berapapun nilai k_1 dan k_2 yang ada pada $\bar{u}$, $c\bar{u}$ tetap akan berada dalam himpunan U (syarat perkalian terpenuhi)

karena dua syarat di atas terpenuhi maka span{U}=span{$\bar{p}, \bar{q}$} adalah subruang dari R^2

4. Kebebasan Linier, Basis, dan Dimensi

U = { $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots\ldots \overline{x_n}$ } dikatakan **bebas linier (Linearly independent)** jika :

- $span\{\mathrm{U}\} = \mathrm{k}_1.\overline{x_1} + \mathrm{k}_2.\overline{x_2} + \ldots \mathrm{k}_\mathrm{n}.\overline{x_n}$ =0 dan hanya memiliki penyelesaian $\mathrm{k}_1 = \mathrm{k}_2 = \mathrm{k}_\mathrm{n} = 0$,
- Jika ada penyelesaian lain maka dikatakan **bergantung linier (Linearly Dependent)**
- Misalkan V ruang vektor dan U= { $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots\ldots \overline{x_n}$ }. U disebut **basis** dari V bila U **bebas linier**
- **Dimensi** Ruang Vektor didefinisikan sebagai banyaknya unsur basis ruang vektor, misal dim (R^3)=3

berikut ini adalah contoh soal untuk memperjelas pernyataan di atas:

4.1. misal U=$\{\bar{p}, \bar{q}\}, dimana\ \bar{p}$=$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ $\bar{q}$=$\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$, apakah U basis dari R^2 ?

Cek kebebasan liniernya, maka

Span{U} = $\mathrm{span}\{\bar{p}, \bar{q}\}$= $\mathrm{k}_1.\bar{p} + \mathrm{k}_2.\bar{q} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

Span{U} =$\mathrm{k}_1.\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \mathrm{k}_2.\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k_1 + 4k_2\\2k_1 + 3k_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

Atau bisa kita tulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{k}_1\\\mathrm{k}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathrm{k}_1\\\mathrm{k}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathrm{k}_1\\\mathrm{k}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

karena k_1=k_2=0, maka U bebas linier, karena U bebas linier maka U adalah basis dari R^2. Dapat diliat secara langsung juga bahwa U memiliki 2 vektor dan dim (R^2) adalah 2 maka U adalah basis dari R^2.

4.2. misal U=$\{\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}\}, dimana\ \bar{p}$=$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ $\bar{q}$=$\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$ $\bar{r}$=$\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$, apakah U basis dari R^2 :

Cek kebebasan liniernya, maka

Span{U} = span{$\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ }= $k_1.\bar{p} + k_2.\bar{q} + k_3.\bar{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Span{U} =$k_1.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2.\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + k_3.\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + 4k_2 + 5k_3 \\ 2k_1 + 3k_2 + k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Invers dari suatu matriks A adalah $A^{-1} = \frac{adj\ A}{\det A}$

Matriks $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ tidak memiliki determinan, maka matriks tersebut tidak bisa di inverskan, oleh karena itu

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

karena $k_1 \neq k_2 \neq 0$, maka U bergantung linier, karena U bergantung linier maka U bukanlah basis dari R^2. Dapat diliat secara langsung juga bahwa U memiliki 3 vektor dan dim (R^2) adalah 2 maka U bukanlah basis dari R^2.

5.1 Kernell atau Null space

Didefinisikan dengan

$$\text{Ker } A = N(A) := \{\vec{x} \in R^n \mid A\,\vec{x} = \vec{0}\},$$

Adalah semua nilai vektor x ($\vec{x}$) yang memenuhi persamaan, dimana $\vec{x}$ adalah anggota R^n dan matriks A jika dikali $\vec{x}$ akan menghasilkan vektor 0 ($\vec{0}$).

5.2 misal A=$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, maka berapakah Null A (N(A))?

A=$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ N(A) := $\{\vec{x} \in R^n \mid A\,\vec{x} = \vec{0}\}$

Matriks di atas bisa diwaki denagn persamaan linear sebagai berikut

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0$
$X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 = 0$
$4X_1 + 3X_2 + 2X_3 + X_4 = 0$

Persamaan diatas bisa diwakili dengan sebuah matriks buatan yaitu

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

kemudian : baris ke 2 diganti dengan : baris ke 2 dikurangi baris ke 1 dan

baris ke 4 diganti dengan : 4 x baris ke 1 dikurangi baris ke 4

sehingga matriks tersebut menjadi :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

kemudian : baris ke 1 diganti dengan : baris ke 1 dikurangi baris ke 2 dan

baris ke 4 diganti dengan : baris ke 4 dikurangi baris ke 3

sehingga matriks tersebut menjadi :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Matriks di atas bisa dituliskan menjadi persamaan :

$$\begin{array}{lll} X_1 - X_3 - 2X_4 = 0 & \text{maka} & X_1 = X_3 + 2X_4 \\ X_2 + 2X_3 + 3X_4 = 0 & \text{maka} & X_2 = -2X_3 - 3X_4 \end{array}$$

Sehingga

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = X_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + X_4 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi N(A) = Span$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

Sebagai catatan tambahan jika kolom – kolom pada Matriks A merupakan bebas linear(linieary independent) maka $\vec{x}$ yang memungkinkan $\vec{x} = \vec{0}$

Dan gambaran atau range dari A adalah

$$\mathrm{Im}A = R(A) := \{y \in F^m : y = Ax, x \in F^n\}.$$

Biarkan a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ menyatakan colom dari matriks $A \in F^{m \times n}$; maka

$$\mathrm{Im}\, A = \mathrm{span}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Sebuah pesegi matriks $U \in F^{n \times n}$ yang kolomnya membentuk basis orthonormal untuk F^n disebut kesatuan matriks (atau matriks orthogonal jika F = R), dan itu membuktikan U*U = I = UU*.

6.1 Trace

Trace dari matriks persegi ordo *n x n* didefinisikan sebagai jumlah elemen pada diagonal utama, yaitu diagonal dari kiri atas ke kanan bawah dinotasikan dengan Tr(A), yaitu

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}+\ldots a_{nn}=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

atau bisa juga dituliskan :

$$\mathrm{Trace}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Sebagai contoh :

matriks $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ hitung trace dari A?

Dapat dituliskan $\mathrm{tr}(A)= a_{11}+a_{22}+a_{33}$

$$= (-1) + 2 + 3 \quad = 4$$

6. Referensi

1. Anton, Howard dan Rorres, Chris. *Elementary Linear Algebra-Ninth Edition.* John Wiley and Sons, Inc. 2005
2. Sibaroni, Yuliant. *Buku Ajar Aljabar Linier.* STT Telkom Bandung. 2002
3. www.Youtube.com (channel: khan academy, bagian Lenear Algebra)

Definisi inverse

JIka A dan B matriks bujur sangkar sedemikian rupa sehingga A B = B A = I , maka B disebut balikan atau *invers* dari A dan dapat dituliskan $B = A^{-1}$ (B sama dengan *invers* A). Matriks B juga mempunyai *invers* yaitu A maka dapat dituliskan $A = B^{-1}$.

Metode penentuan inverse :

Ada beberapa metode untuk menetukan invers dari suatu matriks ,antara lain :

1. subtitusi

2. matriks adjoint

3. eliminasi guass-jordan

4. dekomposisi

5. perkalian matriks inverse elementer

6. dan lain lain

Pada pembahasan kali ini kami hanya kan membahas 2 metode saja yaitu menggunakan matriks adjoint dan partisi matriks-dekomposisi, karena erat kaitannya dengan mata kuliah yang sedang kami ambil yaitu teknik control robust terutama metode dekomposisi.

Penjelasan matriks adjoint

Misalkan A suatu matriks kuadrat dengan baris dan kolomnya masing masing sebesar n. Jadi A = (a_{ij}) ; i,j = 1,2,….n. Dan setiap element dari matriks mempunyai kofaktor, yaitu elemen a_{ij} mempunyai kofaktor k_{ij} .Apabila semua kofaktor itu dihitung untuk semua elemen matriks A, kemudian dibentuk suatu matriks K dengan kofaktor dari semua elemen matriks A sebagai elemennya, maka:

$$K = (K_{ij}) = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{12} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{1n} & K_{2n} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \text{disebut matriks kofaktor}$$

Yang disebut adjoint matriks A ialah suatu matriks yang elemen elemennya terdiri dari transpose semua kofaktor dari elemen-elemen matriks A, yaitu apabila: k=(k_{ij}), dimana k_{ij} ialah kofaktor dari elemen a_{ij} , maka adjoint matriks A yaitu :

$adj(A) = K^T = (K_{ij}^T) = K_{ij}$ (Supranto, 2003:134).

Jadi, jelasnya *Adj (A)* ialah transpose dari matriks kofaktor K, yaitu:

$$Adj(A) = K^T = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{12} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{1n} & K_{2n} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriks orde 2 x 2 :

$$A^{-1} = \frac{adj\ (A)}{\det(A)}$$

A^{-1} = Invers Matriks A

Adj (A) = Matriks adjoint dari matriks A

Det (A) = Determinan matriks A

Untuk matriks berordo 2X2 dimana matriks A =

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Untuk nilai invers dari matriks A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{adj\ (A)}{\det(A)}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(2x3)-(1x5)} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6-5} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks orde 3 x 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Contoh soal :

Carilah invers matriks dibawah ini :

Penyelesaian :

- Mencari determinan matriks A =

  Untuk matriks berukuran 3x3, maka determinan matriks dapat dicari dengan aturan Sarrus

  $$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array}\right.$$

  Det (A) = $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{31}\,a_{22}\,a_{13} - a_{32}\,a_{23}\,a_{11} - a_{33}\,a_{21}\,a_{12}$

  Jadi untuk mencari determinan dari soal matriks A adalah,

  Det (A) = 3(1)(1) + (-1)(4)(2) + 2(0)(-2) – 2(1)(2) – (-2)(4)(3) – 1(0)(-1)

  3 – 7 – 0 – 4 + 24 + 0 =16

- Mencari Adjoint A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Det $(A_{11)}$ =(1)(1) – (-2)(4) = 1 + 8 = 9

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Det $(A_{11)}$ =(-1)(1) – (-2)(2) = -1 + 4 = 3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_{31} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

Det $(A_{31)}$ =(-1)(4) – (1)(2) = -4 - 2 = -6

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Det $(A_{12)}$ =(0)(1) – (2)(4) = 0 - 8 = -8

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Det (A_{22}) =(3)(1) – (2)(2) = 3 - 4 = -1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_{32} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

Det (A_{22}) =(3)(4) – (0)(2) = 12 - 0 =12

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

Det (A_{13}) =(0)(-2) – (2)(1) = 0 - 2 =-2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_{23} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

Det (A_{23}) =(3)(-2) – (2)(-1) = -6 + 2 =-4

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_{33} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Det (A_{33}) =(3)(1) – (-1)(0) = 3 + 0 = 3

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -8 & -2 \\ 3 & -1 & -4 \\ -6 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks kofaktor yang terbentuk adalah :

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & -2 \\ -3 & -1 & 4 \\ -6 & -12 & 3 \end{bmatrix}$$

Adjoint matriks didapat dari transpose matriks kofaktor, didapat:

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 & -2 \\ -3 & -1 & 4 \\ -6 & -12 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ 8 & -1 & -12 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Maka } A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ 8 & -1 & -12 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/16 & -3/16 & -3/8 \\ 1/2 & -1/16 & -3/4 \\ -1/8 & 1/4 & 3/16 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian inverse dengan metode dekomposisi

Dekomposisi adalah menuliskan suatu matriks sebagai jumlah atau perkalian dua matriks , yang masing-masing bentuknya tertentu. Cara menentukan invers dari matriks A berukuran nxn dengan metode dekomposisi dimulai dengan teknik partisi. Partisi matriks adalah membagi matriks menjadi submatriks-submatriks. Ada 2 macam teknik partisi , yaitu partisi simetri dan partisi tak simetri. Partisi simetri adalah apabila matriks asal dibagi menjadi empat buah submatriks yang ukurannya sama. Partisi tak simetri adalah apabila matriks asal dibagi menjadi empat buah submatriks yang ukurannya berbeda, dalam hal ini blok diagonal harus merupakan matriks bujur sangkar dan dua blok lainnya adalah matriks garis dan matris kolom.

Penggunaan matriks dekomposisi bertujuan untuk menyelesaikan suatu invers dari matriks yang berukuran besar, karena apabila kita menggunakan metode yang biasa digunakan seperti matriks adjoint atau operasi baris elementer (OBE) rentan terjadi kesalahan dalam proses perhitungannya dan relative lebih sulit, namun apabila kita menggunakan metode dekomposisi maka matriks yang besar tersebut kemudian akan dibagi menjadi submatriks –submatriks yang berukuran lebih kecil sehingga akan lebih teliti dalam perhitungan menentukan invers dari suatu matriks.

Untuk lebih memahami bagaimana penyelesaian inverse dengan metode dekomposisi, kita bisa membuat formula atau rumus umumnya .

Dimisalkan matriks Z adalah matriks bujur sangkar hasil partisi dari suatu matriks besar ,dimana A11 dan A22 adalah juga merupakan sebuah matriks bujur sangkar.

$$Z = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Misal A11 = A ; A12 = B ; A21 = C ; A22 = D

Maka ;

$$Z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Anggapan A adalah matriks nonsingular (formula 1)

Kemudian pada matriks Z dilakukan dekompoisi, sehingga didapat :

$$Z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Im & 0 \\ CA' & In \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Im & A'B \\ 0 & Iq \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Im & 0 \\ CA' & In \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Im & A'B \\ 0 & Iq \end{bmatrix}$$

Dengan Δ disebut schur complement dari A;

Δ = D – CA'B

Kronologi didapatkannya formula umum diatas adalah sebagai berikut :

Persamaan 1 :

$$\begin{pmatrix} I_m & O \\ R & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C+RA & D+RB \end{pmatrix}.$$

Untuk membuat diagonal blok menjadi 0 , maka C + RA = 0. Sehingga R= - CA' dan menyebabkan nilai D + RB = D – CA'B .

Sehingga persamaan 1 menjadi

<=> $$\begin{pmatrix} I_m & O \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

Persamaan 2 :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & Q \\ O & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B+AQ \\ C & D+CQ \end{pmatrix}.$$

Kemudian untuk membuat diagonal blok menjadi 0, maka B +AQ = 0 , sehingga nilai Q = - A' B dan menyebabkan nilai D+CQ = D – CA'B.

Sehingga persamaan 2 menjadi

<=> $$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ O & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

persamaan 3 :

$$\begin{pmatrix} I_m & O \\ R & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & Q \\ O & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

Dengan melakukan subtitusi nilai R dan Q dari persamaan 1 dan 2 didapat

$$\begin{pmatrix} I_m & O \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ O & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I_m & O \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ O & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

Tujuan dari penjabaran ketiga persamaan diatas adalah untuk pembuktian penjabaran dari formula umum dekomposisi matriks .

Yaitu (dari persmaan 3) ,kita dapat melakukan dekomposisi dari matriks Z.

$$\begin{pmatrix} I_m & O \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ O & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & O \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ O & I_q \end{pmatrix}^{-1}$$

Berdasarkan teori ,bahwa :

$$\begin{bmatrix} Im & C \\ 0 & In \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Im & 0 \\ -C & In \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} Im & B \\ 0 & In \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Im & -B \\ 0 & In \end{bmatrix}$$

Sehingga untuk persamaan 3 menjadi :

$$Z = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & O \\ CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & A^{-1}B \\ O & I_q \end{pmatrix}$$

Kemudian dikembalikan lagi kedalam permisalan: $A_{11} = A$; $A_{12} = B$; $A_{21} = C$; $A_{22} = D$, sehingga didapat kembali formula umum dari dekomposisi matriks dengan Anggapan A_{11} adalah matriks nonsingular dan $\Delta = A_{22} - A_{21} A_{11}' A_{12}$ (Δ adalah *schur complement* dari A_{11}).

$$Z = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Anggapan permisalan D = A_{22} adalah matriks nonsingular (formula 2)

$$Z = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Misal A11 = A ; A12 = B ; A21 = C ; A22 = D

Maka ;

$$Z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Maka berlaku juga pada permisalan A= A_{22} adalah matriks nonsingular, sehingga didapat

$$Z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Im & BD' \\ 0 & In \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Im & 0 \\ D'C & Iq \end{bmatrix}$$

Dengan Δ disebut schur complement dari D;

Δ = A – BD’C atau $\Delta = A_{11} - A_{12} A_{22}' A_{21}$

Kronologi didapatkannya formula umum diatas adalah sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} I_m & -BD^{-1} \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix}$$ persamaan 1

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & O \\ -D^{-1}C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ O & D \end{pmatrix}$$ persamaan 2

$$\begin{pmatrix} I_m & -BD^{-1} \\ O & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_p & O \\ -D^{-1}C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & O \\ O & D \end{pmatrix}$$

dari persamaan 1 dan 2 didapat persamaan 3

dari persamaan 3 didapat bahwa

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Im & -BD' \\ 0 & In \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cancel{A} & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Im & 0 \\ -D'C & Iq \end{bmatrix}^{-1}$$

Berdasarkan teori ,bahwa :

$$\begin{bmatrix} Im & C \\ 0 & In \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Im & 0 \\ -C & In \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} Im & B \\ 0 & In \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Im & -B \\ 0 & In \end{bmatrix}$$

Sehingga untuk persamaan 3 menjadi

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Im & BD' \\ 0 & In \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cancel{A} & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Im & 0 \\ D'C & Iq \end{bmatrix}$$

Selanjutnya perhitungan matriks dari formula 1 dan 2 :

Misal A11 = A ; A12 = B ; A21 = C ; A22 = D dan A11 adalah matriks nonsingular

Formula 1 ;

$$Z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA' & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A'B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ -E^{-1}CA^{-1} & E^{-1} \end{pmatrix}$$

Dari Persamaan 1 :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I_m & O \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}}_{x} \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ O & E \end{pmatrix}}_{V}$$

Dari matriks diatas $E := D - CA^{-1}B$

Dan $E := D - CA^{-1}B = \Delta$

$Y = V X^{-1}$

$Y^{-1} = V^{-1} X$, sehingga :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_m & O \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}$$

Dari teori

$$\boxed{\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{pmatrix}}$$

Maka dapat dipersamakan dengan persamaan 1

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} A & B \\ O & E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_m & O \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ O & E^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & O \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ -E^{-1}CA^{-1} & E^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Misal A11 = A ; A12 = B ; A21 = C ; A22 = D dan A22 adalah matriks nonsingular

Formula 2 ;

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Im & BD' \\ 0 & In \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cancel{A} & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Im & 0 \\ D'C & Iq \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} F^{-1} & -F^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CF^{-1} & D^{-1} + D^{-1}CF^{-1}BD^{-1} \end{pmatrix}$$

Kronologi mendapatkan rumusnya adalah sebagai berikut ;

Dengan F adalah ~~A~~(schum complement dari D) = $A - BD^{-1}C$

Dianalogikan bahwa

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & O \\ O & I_n \end{pmatrix}$$

Lalu didapat

$AP + BR = I_m, \quad CP + DR = O.$ persamaan 1

$AQ + BS = O, \quad CQ + DS = I_n.$ persamaan 2

Dari persamaan 1 didapat $R = -D^{-1}CP$

lalu

$$I_m = AP + BR = AP - BD^{-1}CP = (A - BD^{-1}C)P = FP.$$

Berarti : $P = F^{-1}$ dan $R = -D^{-1}CF^{-1}$.

Dari persamaan 2 didapat

S = D^{-1}- D^{-1}CQ

Dan f = $A - BD^{-1}C$ sehingga

$$O = AQ + BS = AQ + BD^{-1} - BD^{-1}CQ = FQ + BD^{-1}$$

Lalu didapat

$Q = -F^{-1}BD^{-1}$ Dan $S = D^{-1} + D^{-1}CF^{-1}BD^{-1}$.

Jadi sudah didapat semua komponen (P Q R S)

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$$

Contoh soal penyelesaian matriks dengan metode dekomposisi :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- Langkah yang pertama mempartisi matriks diatas menjadi 2 x 2 sesuai dengan bentuk umum dibawah ini :

$$A = \begin{bmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{bmatrix}$$

$$B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$A11 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$A12 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$A21 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$

$A22 = [2]$

Maka kita dapat menggunakan rumus karena A11 merpakan matriks Non singular sehingga kita menggunakan rumus :

$$\begin{pmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A11^{-1} + A11^{-1} A12\, \Delta^{-1} A21\, A11^{-1} & - A11^{-1} A12\, \Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1} A21\, A11^{-1} & \Delta^{-1} \end{pmatrix}$$

Berdasarkan rumus diatas kita cari nilai – nilai dari setiap matriks diatas :

$A11^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$

$\Delta = A22 - A21\, A11^{-1}\, A12$

$$\Delta = [2] - \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta = -2$

$\Delta^{-1} = -0.5$

$$A11^{-1} + A11^{-1}\,A12\,\Delta^{-1}\,A21\,A11^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-A11^{-1}\,A12\,\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} * -0.5 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$-\Delta^{-1}\,A21\,A11^{-1} = -0.5 * \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Sehingga invers matriks B dengan metode dekomposisi adalah ,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Mencari invers matriks dengan menggunakan matlab :

```
>> A = [2 5; 1 3]

A =


     2     5

     1     3

>> inv(A)


ans =


     3    -5

    -1     2
```

SEMIDEFINIT MATRICES

Suatu matriks Hermitian $A \in Mn$ dikatakan *definit positif* jika $x^*Ax > 0$, untuk semua $x \in C_n$.
Jika ketaksamaan di atas diperlemah menjadi $x * Ax \geq 0$ maka A dikatakan *semidefinit positif*. Secara implicit, ruas kiri pada ketaksamaan di atas menyatakan suatu bilangan real.

- **Matrik Hessian**

Beberapa konsep dalam matriks dan aljabar seperti matriks Hessian dapat kita gunakan sebagai salah satu metode untuk menentukan jenis matriks seperti matriks definite positive, semidefinite positif, definite negative atau indefinite dan definit negative.

Diberikan f($x_1, x_2, \ldots, x_n$) adalah sebuah fungsi dengan n variable, ($x_1, x_2, \ldots, x_n$). Matriks Hessian adalah matriks yang merupakan turunan parsial dari fungsi tersebut dengan susunan seperti berikut :

$$(H) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{nn} \end{bmatrix}$$

$$f_{11} = \frac{\partial^2 f}{(\partial x_2)^2} \qquad f_{1n} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}$$

$$f_{2n} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \qquad f_{nn} = \frac{\partial^2 f}{(\partial x_n)^2}$$

Contoh :

Tentukan matriks hessian dari suatu fungsi dengan tiga variabel berikut :

$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 5x_1x_3 + 6x_2x_3$

turunan parsial I :

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + 4x_2 - 5x_3$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2 + 4x_1 + 6x_3$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial x_3} = - 6x_3 - 5x_1 + 6x_2$

turunan parsial II :

$$f_{11} = \frac{\partial^2 f}{(\partial x_1)^2} = 2 \qquad f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 4 \qquad f_{13} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = -5$$

$$f_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 4 \qquad f_{22} = \frac{\partial^2 f}{(\partial x_2)^2} = 4 \qquad f_{23} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = 6$$

$$f_{31} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = -5 \qquad f_{32} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = 6 \qquad f_{33} = \frac{\partial^2 f}{(\partial x_3)^2} = -6$$

Maka akan diperoleh matriks hessian :

$$(H) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 4 & 4 & 6 \\ -5 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

- **Bagian-bagian matriks hessian**

Jika terdapat suatu matriks berukuran (n x n), maka principal minor ke k (k≤n) adalah suatu sub matriks dengan ukuran (k x k) yang diperoleh dengan menghapus (n-k) baris dan kolom yang bersesuaian dari matriks tersebut.

Contoh :

$$(Q) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Principal minor ke-1 adalah elemen-elemen yang diagonal yaitu 1,5,9.

Principal minor ke-2 adlah matriks-matriks (2 x 2) berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Principal minor ke-3 adalah matriks Q itu sendiri.

Determinan dari suatu principal minor dinamakan principal determinan.

Leading principal minor ke k dari suatu matriks n x n diperoleh dengan menghapus (n - k) baris terakhir dan kolom yang bersesuaian. Dengan matriks Q diatas leading minor ke-1 adalah 1 (hapus dua baris terakhir dan dua kolom terakhir). Leading principal minor ke-2 adalah :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Sementara yang ke-3 adalah matriks Q itu sendiri.

Banyaknya leading Principle determinan dari suatu matriks (n x n) adalah n. Determinan dari leading principal minor dinamakan leading principal determinan.

- **Menentukan jenis matriks hessian**

Cara pengujian sederhana untuk menentukan apakah suatu matriks adalah definit positif, semidefinit positif, definit negative, semidefinit negative atau indefinite. Semua pengujian ini berlaku hanya jika matriksnya simetris.

Ketentuan uji bagi matriks definit positif adlah :

1. Semua elemen diagonal harus positif
2. Semua leading principal determinan **harus positif (> 0)**

Ketentuan uji untuk matriks semidefinit positif adalah :

1. Semua elemen diagonal positif
2. Semua leading principal determinan **non negative (≥ 0)**

Untuk membuktikan bahwa suatu matriks *definit negative (semidefinit negatif),* uji negative dari matriks itu untuk *definit positif (semidefinit positif*). Suatu uji cukup bagi suatu matriks menjadi *indefinite* adalah bahwa sekurang-kurangnya dua elemen diagonalnya memiliki tanda berlawanan.

- **Sifat-sifat penting berkaitan dengan matriks definit positif**

Beberapa sifat penting berkaitan dengan matriks definit positif adalah:

a. Penjumlahan sebarang dua buah matriks definit positif menghasilkan matriks definit positif juga. Secara umum berlaku sebarang kombinasi linear nonnegative dari matriks-matriks semidefinit positif menghasilkan matriks semidefinit positif

   Bukti:
   Misalkan A dan B keduanya semidefinit positif, dan $a,b \geq O$.
   Perhatikan bahwa $x*(aA + bB)x = a(x* Ax)+ b(x*Bx)\geq O$ untuk semua $x \in Cn$.

b. Setiap nilai eigen dari matriks definit positif adalah bilangan real positif

   Bukti:
   Misalkan A definit positif dan $\lambda \in \sigma (A)$, yaitu suatu nilai eigen dari A dan x adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .
   Perhatikan,

$$x* Ax = x*\lambda x = \lambda x*x$$

   Oleh karena itu kita peroleh $\lambda = \frac{(x*Ax)}{x*x}$ dimana pembilang dan penyebut keduanya positif.

c. Sebagai akibat dari bagian (b), trace dan determinan dari matriks definit positif adalah positif

- **Karakterisasi Matriks Definit Positif**

Pada bagian ini kita akan melihat syarat cukup yang harus dipenuhi oleh matriks definit dan semidefinit positif yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2

1. Suatu matriks Hermitian $A\in Mn$ adalah semidefinit positif *jika dan hanya jika* semua nilai eigennya nonnegative.

2. Suatu matriks Hermitian *n A∈M* adalah definit positif *jika dan hanya jika* semua nilai eigennya positif.

Bukti:
Jika setiap nilai eigen dari A adalah positif maka untuk sebarang vektor tak nol $x \in Cn$
Berlaku

$$x^* Ax = x^* U^* DUx = y^* Dy = \sum_{i=}^{n} di\ yi'\ yi > \sum_{i=}^{n} di\ |yi\ ||yi\ | > 0$$

Dimana *D* adalah matriks diagonal dengan entri-entri diagonal adalah nilai-nilai eigen dari *A*, $y = Ux$ dan *U* uniter.

Dengan menggunakan teorema di atas kita dapat memperoleh akibat berikut

Akibat 3
Jika *n A∈M* suatu matriks semidefinit positif maka demikian juga matriks *Ak*, *k* = 1,2,…

Bukti:
Jika λ adalah suatu nilai eigen dari *A* maka λ*k* adalah nilai eigen untuk *Ak*. Berdasarkan Teorema di atas maka *Ak* semidefinit positif.

Contoh Soal :

Contoh 1 :

$f(x) = 7x_1^2 + 10x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$

maka

$$(H) = \begin{bmatrix} 14 & -4 & 2 \\ -4 & 20 & -4 \\ 2 & -4 & -14 \end{bmatrix}$$

dengan *leading principal determinan* $H_1 = 14$, $H_2 = 264$, $H_3 = 3456$

sehingga (H) *definit positif.*

Contoh 2 :

$f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 3x_1x_2 - 3x_1x_3 + 4x_2x_3$

maka

$$(H) = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

dengan *leading principal determinant* H_1 = -2, H_2 = -5, H_3 = -12

sehingga (H) *definit negatif.*

Contoh 3 :

$f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 1x_1x_3 + 4x_2x_3$

maka

$$(H) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

dengan *leading principal determinan* H_1 = 2, H_2 =0 , H_3 = 24

sehingga (H) *semidefinit positif*

Ulinnuha L	**(L2F009030)**
Susdarminasari T	**(L2F009034)**
Achmad ulul Azmy	**(L2F009091)**

Singular Value Decomposition

A. Pengertian

Singular Value Decomposition (SVD) adalah suatu cara memfaktorkan matrik A dengan cara menguraikan matrik kedalam dua matrik P dan Q. Jika terdapat matrik berukuran m x n dengan rank r > 0, maka penguraian matrik dapa dinyatakan sebagai

$$A = P \, \Delta \, Q^T$$

Rank (r) menyatakan banyaknya jumlah baris atau kolom yang saling independent antara baris atau kolom lainnya dalam suatu matrik. Matrik P merupakan matrik orthogonal berukuran m x r sedangkan matrik Q merupakan matrik orthogonal berukuran n x r. Matrik Δ adalah matrik diagonal berukuran r x r yang elemen diagonalnya merupakan akar positif dari eigenvalue matrik A. Terbentuknya matrik Δ tergantung kondisi matrik A, yaitu :

a. Δ, bila r = m = n
b. $\begin{bmatrix} \Delta \\ (0) \end{bmatrix}$ bila r = n dan r < m
c. $[\Delta \quad (0)]$ bila r = m dan r < n
d. $\begin{bmatrix} \Delta & (0) \\ (0) & (0) \end{bmatrix}$ bila r < m dan r < n

Matrik P dapat diperoleh melalui perkalian antara A, Q, dan Δ^{-1} sehingga dapat dinyatakan $P = AQ\Delta^{-1}$

CONTOH

Contoh 1 :

Menghitung SVD matrik non singular

X = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ Hitung SVD dari matrik X

Jawab :

Pertama mencari nilai eigenvalue dari X X^T

A = X X^T = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}$

$\left|XX^T - \lambda I\right| = 0$,, $\left|\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right| = 0$

$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 7 \\ 7 & 13-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(5-\lambda)(13-\lambda) - (7)(7) = 0$

$65 - 5\lambda - 13\lambda + \lambda^2 - 49 = 0$

$\lambda^2 - 18\lambda + 16 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)} = 9 \pm \sqrt{65}$$

- eigenvalue yang didapat adalah $\lambda_1 = 9 - \sqrt{65} = 0.9377$ dan $\lambda_2 = 9 + \sqrt{65} = 17.0623$

kedua mencari eigenvektor dari masing masing λ

- $\lambda_1 = 0.9377$

  $(XX^T - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$

  $\left(\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.9377 & 0 \\ 0 & 0.9377 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\begin{bmatrix} 4.0623 & 7 \\ 7 & 12.0623 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $4.0623x_1 + 7x_2 = 0 ; 7x_1 + 12.0623x_2 = 0$

  $x_1 = -\frac{7}{4.0623} x_2 = -1.7232x_2$

Proses normalisai

$$x_1^* = \frac{x_1}{\left(x_1^T \quad x_1\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} -1.7232x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\left(\begin{pmatrix} -1.7232x_2 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1.7232x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -1.7232 \\ 1 \end{pmatrix} x_2}{\left(2.9693X_2^2 + x_2^2\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} -1.7232 \\ 1 \end{pmatrix} x_2}{x_2\sqrt{3.9693}} = \begin{pmatrix} -0.8649 \\ 0.5019 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = 17.0623$

  $(XX^T - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$

  $\left(\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 17.0623 & 0 \\ 0 & 17.0623 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\begin{bmatrix} -12.0623 & 7 \\ 7 & -4.0623 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $-12,0623x_1 + 7x_2 = 0 ; 7x_1 - 4.0623x_2 = 0$

  $x_1 = \frac{7}{12.0623} x_2 = 0.5803 X_2$

Proses normalisai

$$x_2^* = \frac{x_1}{\left(x_1^T \quad x_1\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} 0.5803\,\mathrm{X}_2 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\left(\begin{pmatrix} 0.5803\,\mathrm{X}_2 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5803 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 0.5803 \\ 1 \end{pmatrix} x_2}{\left(0.3367\, x_2^2 + x_2^2\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} 0.5803 \\ 1 \end{pmatrix} x_2}{x_2\sqrt{1.3367}} = \begin{pmatrix} 0.5019 \\ 0.8649 \end{pmatrix}$$

Sehingga eigenvektor yang didapat dari $x_1^*\ dan\ x_2^*$ adalah P = $\begin{bmatrix} -0,8649 & 0,5019 \\ 0,5019 & 0,8649 \end{bmatrix}$

Ketiga mencari nilai eigenvalue dari X^TX

B = $X^T X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$

$\left|X^TX - \lambda I\right| = 0,, \quad \left|\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right| = 0$

$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 8 \\ 8 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(8-\lambda)(10-\lambda) - (8)(8) = 0$

$80 - 8\lambda - 10\lambda + \lambda^2 - 64 = 0$

$\lambda^2 - 18\lambda + 16 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)} = 9 \pm \sqrt{65}$$

- eigenvalue yang didapat adalah $\lambda_1 = 9 - \sqrt{65} = 0.9377$ dan $\lambda_2 = 9 + \sqrt{65} = 17.0623$

Keempat mencari nilai eigenvektor dari masing masing λ pada X^TX

- $\lambda_1 = 0.9377$

  $(X^TX - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$

  $\left(\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.9377 & 0 \\ 0 & 0.9377 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\begin{bmatrix} 7.0623 & 8 \\ 8 & 9.0623 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $7.0623x_1 + 8\,x_2 = 0\ ;\ 8\,x_1 + 9.0623\,x_2 = 0$

  $x_1 = -\frac{8}{7.0623} x_2 = -1.1328\,x_2$

Proses normalisai

$$x_1^* = \frac{x_1}{\left(x_1^T \quad x_1\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} -1.1328x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\left(\begin{pmatrix} -1.1328x_2 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1.1328x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -1.1328 \\ 1 \end{pmatrix} x_2}{\left(1{,}2832x_2^2 + x_2^2\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} -1.1328 \\ 1 \end{pmatrix} x_2}{x_2\sqrt{2.2832}} = \begin{pmatrix} -0.7497 \\ 0.6618 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = 17.0623$

  $(X^T X - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$

  $$\left(\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 17.0623 & 0 \\ 0 & 17.0623 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  $$\begin{bmatrix} -9.0623 & 8 \\ 8 & -7.0623 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  $-9{,}0623x_1 + 8\,x_2 = 0$; $8\,x_1 - 7.0623\,x_2 = 0$

  $$X_1 = \frac{8}{9.0623} X_2 = 0.8828\,X_2$$

Proses normalisai

$$x_2^* = \frac{x_1}{\left(x_1^T \quad x_1\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} 0.8828\,X_2 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\left(\begin{pmatrix} 0.8828\,X_2 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8828x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 0.8828 \\ 1 \end{pmatrix} x_2}{\left(0.7793\,x_2^2 + x_2^2\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} 0.8828 \\ 1 \end{pmatrix} x_2}{x_2\sqrt{1.7793}} = \begin{pmatrix} 0.6618 \\ 0.7497 \end{pmatrix}$$

Sehingga eigenvektor yang didapat dari $x_1^*\ dan\ x_2^*$ adalah Q = $\begin{bmatrix} -0{,}7497 & 0{,}6618 \\ 0{,}6618 & 0{,}7497 \end{bmatrix}$

Sedangkan matrik Δ adalah Δ = $\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix}$ diambil dari eigenvalue matrik A atau B, pilih salah satu.

$$\Delta = \begin{bmatrix} \sqrt{0{,}9377} & 0 \\ 0 & \sqrt{17{,}0623} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9684 & 0 \\ 0 & 4{,}1307 \end{bmatrix}$$

Matrik SVD adalah bila P Δ Q = X

P Δ Q = $\begin{bmatrix} -0,8649 & 0,5019 \\ 0,5019 & 0,8649 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,9684 & 0 \\ 0 & 4,1307 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,7497 & 0,6618 \\ 0,6618 & 0,7497 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} -0,8376 & 2,0733 \\ 0,4861 & 3,5727 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,7497 & 0,6618 \\ 0,6618 & 0,7497 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Terbukti bahwa P Δ Q = X = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Contoh 2 :

Menghitung SVD **matrik simetri non singular**, bedanya ini langsung mencari eigenvalue tanpa harus mengalikannya dengan transposenya.

1. Diketahui A = $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
2. Mencari nilai eigenvalue matrik A

   $|\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}| = 0$,, $\left| \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right|$ = 0

   $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$ = 0

   (5-λ)(2-λ) – 4 = 0

   10 - 5λ - 2λ + λ^2 – 4 = 0

   λ^2 - 7λ + 6 = 0

   - eigenvalue yang didapat adalah $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 6$
3. Mencari eigenvektor matrik A

   λ_1 = 1

   (A – λI)$\underline{x}$ = $\underline{0}$

   ($\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ - $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $2x_1 + x_2 = 0$

   $x_1 = -\frac{1}{2} x_2 = -0,5\, x_2$

Proses normalisasi

$$x_1^* = \frac{x_1}{\left(x_1^T \quad x_1\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} -0{,}5x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\left(\begin{pmatrix} -0{,}5x_2 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}5x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} x_2}{\left(0{,}25x_2^2 + x_2^2\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} -0{,}25 \\ 1 \end{pmatrix} x_2}{x_2\sqrt{1{,}25}} = \begin{pmatrix} -0.4472 \\ 0.8944 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 6$

$(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$

$$\left(\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-x_1 + 2x_2 = 0$

$x_1 = 2X_2$

Proses normalisai

$$x_2^* = \frac{x_1}{\left(x_1^T \quad x_1\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} 2X_2 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\left(\begin{pmatrix} 2X_2 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2}{\left(4x_2^2 + x_2^2\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2}{x_2\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} 0.8944 \\ 0.4472 \end{pmatrix}$$

Sehingga eigenvektor yang didapat dari $x_1^*\ dan\ x_2^*$ adalah X = $\begin{bmatrix} -0{,}4472 & 0{,}8944 \\ 0{,}8944 & 0{,}4472 \end{bmatrix}$

4. Menentukan Δ

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Mencari SVD dengan rumus $A = X\,\Delta\,X^T$

$$A = \begin{bmatrix} -0{,}4472 & 0{,}8944 \\ 0{,}8944 & 0{,}4472 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}4472 & 0{,}8944 \\ 0{,}8944 & 0{,}4472 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0{,}4472 & 5{,}3664 \\ 0{,}8944 & 2{,}6832 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}4472 & 0{,}8944 \\ 0{,}8944 & 0{,}4472 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ maka terbukti nilai $X\,\Delta\,X^T = A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Contoh 3:

Menghitung SVD matriks $A(_{mxn)} = A_{(3x2)}$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Eigenvalue A^TA

$$\left| \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(2- \lambda)^2-1=0$

$4-4\lambda + \lambda^2-1=0$

$\lambda^2-4\lambda+3=0$

$(\lambda-3)(\lambda-1)=0$

$\lambda_1=1 \quad \lambda_2=3$

Eigenvektor $A^T A$

- Untuk λ_1=1

$$(\underline{A} - \lambda_1 I)\underline{x} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$

Proses Normalisasi

$$\underline{x_1}^* = \frac{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\left(\begin{pmatrix} -x_2 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)^{1/2}}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\left[x_2^2 + x_2^2 \right]^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}}{x_2\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

- Untuk λ_1=3

$$(\underline{A}-\lambda_2 I)\underline{x}=\underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

Proses Normalisasi

$$\underline{x_2}^* = \frac{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\left(\begin{pmatrix} -x_2 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\left[x_2^2 + x_2^2\right]^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}}{x_2\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Sehingga eigenvektor $A^T A$

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eigenvalue AA^T

$$\left|\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(2-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)+0+0-(1-\lambda)-(1-\lambda)=0$

$(\lambda^2-2\lambda+1)(2-\lambda)-(2-2\lambda)=0$

$2\lambda^2-4\lambda+2-\lambda^3-2\lambda-\lambda-2+2\lambda=0$

$-\lambda^3-3\lambda=0$

$-\lambda(\lambda^2-3)=0 \Rightarrow \lambda=0 ;\ \lambda=1 ;\ \lambda=3$

Eigenvektor AA^T

- Untuk $\lambda_1 = 0$

$$(\underline{A}-\lambda_1 I)\underline{x} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$2x_1 + x_2 + x_3 = 0$; $x_1 + x_2 = 0$; $x_1 + x_3 = 0$

$x_2 = -x_1$; $x_3 = -x_1$

Proses Normalisasi

$$\underline{x_1^*} = \frac{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}{\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)^{1/2}}$$

$$\underline{x_1^*} = \frac{\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix}}{\left(\begin{bmatrix} x_1 & -x_1 & -x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix}\right)^{1/2}}$$

$$\underline{x_1^*} = \frac{\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix}}{(3x_1^2)^{1/2}} = \frac{\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix}}{\sqrt{3}x_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

- Untuk $\lambda_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$; $x_1 = 0$; $x_1 = 0$

$x_3 = -x_2$

Proses Normalisasi

$$\underline{x_2^*} = \frac{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}{\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right)^{1/2}}$$

$$\underline{x_2^*} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}}{\left(\begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \right)^{1/2}}$$

$$\underline{x_2^*} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}}{(2x_3^2)^{1/2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

- Untuk $\lambda_3 = 3$

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-x_1 + x_2 + x_3 = 0$; $x_1 - 2x_2 = 0$; $x_1 - 2x_3 = 0$

$x_2 = \frac{1}{2} x_1$; $x_3 = \frac{1}{2} x_1$

Proses Normalisasi

$$\underline{x_3^*} = \frac{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}{\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right)^{1/2}}$$

$$\underline{x_3^*} = \frac{\begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 \end{bmatrix}}{\left(\begin{bmatrix} x_1 & \frac{1}{2}x_1 & \frac{1}{2}x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 \end{bmatrix} \right)^{1/2}}$$

$$\underline{x_3^*} = \frac{\begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 \end{bmatrix}}{\left(1\frac{1}{2}x_1^2 \right)^{1/2}} = \frac{\begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 \end{bmatrix}}{1{,}2247x_1} = \begin{bmatrix} 0{,}8165 \\ 0{,}4082 \\ 0{,}4082 \end{bmatrix}$$

Mencari Nilai P:

$P = AQ\Delta^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

$$A = P\Delta Q$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 4

Menghitung SVD matriks $A_{(mxn)} = A_{(2x3)}$

Dapatkan Singular Value Decomposition (SVD) dari matrik yang berukuran mxn berikut ini :

$$B_{(2\times3)} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Jawab:

1. **Menghitung Matrik B^TB dan BB^T**

$$B^TB = C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 4 & 16 \\ 4 & 8 & -4 \\ 16 & -4 & 20 \end{bmatrix}$$

$$BB^T = D = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 12 \\ 12 & 24 \end{bmatrix}$$

2. **Mencari Eigenvalue (λ) dari Matrik B^TB dan BB^T**

<u>Eigenvalue Matrik B^TB:</u> $|C-\lambda I| = 0$

$$\left| \begin{bmatrix} 20 & 4 & 16 \\ 4 & 8 & -4 \\ 16 & -4 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 20-\lambda & 4 & 16 \\ 4 & 8-\lambda & -4 \\ 16 & -4 & 20-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ $[(20-\lambda)(8-\lambda)(20-\lambda) + 4(-4)16 + 16(4)(-4)] - [16(8-\lambda)16 + (-4)^2(20-\lambda) + 4^2(20-\lambda)] = 0$

$\Rightarrow$ $[-\lambda^3 + 48\lambda^2 - 720\lambda + 3200 - 256 - 256] - [256(8-\lambda) + 16(20-\lambda) + 16 \quad (20-\lambda)] = 0$

$\Rightarrow$ $(-\lambda^3 + 48\lambda^2 - 720\lambda + 2688) - (2048 - 256\lambda + 320 - 16\lambda + 320 - 16\lambda) = 0$

$\Rightarrow$ $(-\lambda^3 + 48\lambda^2 - 720\lambda + 2688) - (2688 - 288\lambda) = 0$

$\Rightarrow$ $-\lambda^3 + 48\lambda^2 - 432\lambda = 0$

$\Rightarrow$ $-\lambda(\lambda^2 - 48\lambda - 432) = 0$

$\Rightarrow$ $-\lambda\ (\lambda - 12)(\lambda - 36) = 0$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 12$, dan $\lambda_3 = 36$

Jika dinyatakan dalam bentuk matrik diagonal $\Delta_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix}$

<u>Eigenvalue Matrik BB^T:</u> $|D-\lambda I| = 0$

$$\left| \begin{bmatrix} 24 & 12 \\ 12 & 24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 24-\lambda & 12 \\ 12 & 24-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ $[(24-\lambda)(24-\lambda) - 12^2] = 0$

$\Rightarrow$ $(\lambda^2 - 48\lambda + 576 - 144) = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda^2 - 48\lambda + 432 = 0$

$\Rightarrow$ $(\lambda - 12)\ (\lambda - 36) = 0$

$\lambda_1 = 12$ dan $\lambda_2 = 36$

Jika dinyatakan dalam bentuk matrik diagonal $\Delta_2^2 = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 36 \end{bmatrix}$

Pada proses mencari eigenvalue matrik B^TB (matrik C) didapatkan $\lambda_1 = 0$, mengacu pada prosedur penyelesaian SVD matrik m×n terdapat catatan bahwa: jika dalam perhitungan eigenvalue didapatkan $\lambda = 0$ maka untuk prosedur perhitungan eigenvalue $\lambda = 0$ diabaikan yang berakibat eigenvektor untuk kolom $\lambda = 0$ pada prosedur selanjutnya akan dihilangkan dari matrik eigenvektornya.. Sehingga, matrik diagonal $\Delta_1^2 = \Delta_2^2 = \Delta^2$.

$$\Delta^2 = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 36 \end{bmatrix}$$

3. Mencari Eigenvektor Matrik B^TB dan BB^T

Untuk $\lambda_1 = 0$

<u>Eigenvektor Matrik B^TB:</u>

- Untuk $\lambda_1 = 0$ (C – □□□□ $\underline{x_1} = \underline{0}$

$$\begin{bmatrix} 20-\lambda & 4 & 16 \\ 4 & 8-\lambda & -4 \\ 16 & -4 & 20-\lambda \end{bmatrix} \underline{x_1} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 20-0 & 4 & 16 \\ 4 & 8-0 & -4 \\ 16 & -4 & 20-0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_3 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 20 & 4 & 16 \\ 4 & 8 & -4 \\ 16 & -4 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_3 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 20x_{11} + 4x_{12} + 16x_{13} \\ 4x_{11} + 8x_{12} - 4x_{13} \\ 16x_{11} - 4x_{12} + 20x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 20x_{11} + 4x_{12} + 16x_{13} = 0 \\ 4x_{11} + 8x_{12} - 4x_{13} = 0 \\ 16x_{11} - 4x_{12} + 20x_{13} = 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \text{Pers.1} \\ \longrightarrow \text{Pers.2} \\ \longrightarrow \text{Pers.3} \end{matrix}$$

Eliminasi Pers.1 dan Pers.3:

$20x_{11} + 4x_{12} + 16x_{13} = 0$

$16x_{11} - 4x_{12} + 20x_{13} = 0$

――――――――――――― +

$36x_{11} + 36x_{13} = 0$

$x_{11} + x_{13} = 0$

$x_{11} = - x_{13}$ $\longrightarrow$ Pers.4

Subsitusikan Pers.4 ke Pers.2

$4(-x_{13}) + 8x_{12} - 4x_{13} = 0$

$8x_{12} - 8x_{13} = 0$

$x_{12} = x_{13}$ $\longrightarrow$ Pers.5

Proses normalisasi untuk $\underline{x}_1$:

$$\underline{x}_1^* = \frac{\underline{x}_1}{\left(\underline{x}_1^T\, \underline{x}_1\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix}}{\left((x_{11}\ \ x_{12}\ \ x_{13}) \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} \right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} -x_{13} \\ x_{13} \\ x_{13} \end{pmatrix}}{\left((-x_{13}\ \ x_{13}\ \ x_{13}) \begin{pmatrix} -x_{13} \\ x_{13} \\ x_{13} \end{pmatrix} \right)^{1/2}}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -x_{13} \\ x_{13} \\ x_{13} \end{pmatrix}}{(x_{13}{}^2 + x_{13}{}^2 + x_{13}{}^2)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} -x_{13} \\ x_{13} \\ x_{13} \end{pmatrix}}{(3x_{13}{}^2)^{1/2}} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5774 \\ 0{,}5774 \\ 0{,}5774 \end{pmatrix}$$

- Untuk $\lambda_2 = 12$ $\qquad$ $(C - \lambda_2 I)\ \underline{x}_2 = \underline{0}$

$$\begin{bmatrix} 20-\lambda & 4 & 16 \\ 4 & 8-\lambda & -4 \\ 16 & -4 & 20-\lambda \end{bmatrix} \underline{x}_2 = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 20-12 & 4 & 16 \\ 4 & 8-12 & -4 \\ 16 & -4 & 20-12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 16 \\ 4 & -4 & -4 \\ 16 & -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 8x_{21} + 4x_{22} + 16x_{23} \\ 4x_{21} - 4x_{22} - 4x_{23} \\ 16x_{21} - 4x_{22} + 8x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8x_{21} + 4x_{22} + 16x_{23} = 0 \\ 4x_{21} - 4x_{22} - 4x_{23} = 0 \\ 16x_{21} - 4x_{22} + 8x_{23} = 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{—— Pers.1} \\ \text{—— Pers.2} \\ \text{—— Pers.3} \end{matrix}$$

Eliminasi Pers.1 dan Pers.3:

$8x_{21} + 4x_{22} + 16x_{23} = 0$

$16x_{21} - 4x_{22} + 8x_{23} = 0$

________________________ +

$24x_{21} + 24x_{23} = 0$

$x_{21} + x_{23} = 0$

$x_{21} = -x_{23} \longrightarrow$ Pers.4

Subsitusikan Pers.4 ke Pers.2

$4(-x_{23}) - 4x_{22} - 4x_{23} = 0$

$-4x_{22} - 8x_{23} = 0$

$x_{22} = -2x_{23} \longrightarrow$ Pers.5

Proses normalisasi untuk $\underline{x}_2$:

$$\underline{x}_2^* = \frac{\underline{x}_2}{\left(\underline{x}_2^T \underline{x}_2\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix}}{\left((x_{21} \;\; x_{22} \;\; x_{23}) \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} \right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} -x_{23} \\ -2x_{23} \\ x_{13} \end{pmatrix}}{\left((-x_{23} \;\; -2x_{23} \;\; x_{23}) \begin{pmatrix} -x_{23} \\ -2x_{23} \\ x_{23} \end{pmatrix} \right)^{1/2}}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -x_{23} \\ -2x_{23} \\ x_{23} \end{pmatrix}}{(x_{23}{}^2 + 4x_{23}{}^2 + x_{23}{}^2)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} -x_{23} \\ -2x_{23} \\ x_{23} \end{pmatrix}}{(6x_{23}{}^2)^{1/2}} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}4082 \\ -0.8165 \\ 0{,}4082 \end{pmatrix}$$

- Untuk $\lambda_3 = 36$ $\quad (C - \lambda_3 I)\ \underline{x_3} = \underline{0}$

$$\begin{bmatrix} 20-\lambda & 4 & 16 \\ 4 & 8-\lambda & -4 \\ 16 & -4 & 20-\lambda \end{bmatrix} \underline{x_3} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 20-36 & 4 & 16 \\ 4 & 8-36 & -4 \\ 16 & -4 & 20-36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} -16 & 4 & 16 \\ 4 & -28 & -4 \\ 16 & -4 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} -16x_{31} + 4x_{32} + 16x_{33} \\ 4x_{31} - 28x_{32} - 4x_{33} \\ 16x_{31} - 4x_{32} - 16x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -16x_{31} + 4x_{32} + 16x_{33} = 0 \\ 4x_{31} - 28x_{32} - 4x_{33} = 0 \\ 16x_{31} - 4x_{32} - 16x_{33} = 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \text{Pers.1} \\ \text{— Pers.2} \\ \text{— Pers.3} \end{matrix}$$

Eliminasi Pers.1 dan 4 × Pers.2:

$-16x_{31} + 4x_{32} + 16x_{33} = 0$

$16x_{31} - 112x_{32} + 16x_{33} = 0$

———————————— +

$108x_{32} = 0$

$x_{32} = 0 \longrightarrow$ Pers.4

Subsitusikan Pers.4 ke Pers.3

$16x_{31} - 4(0) - 16x_{33} = 0$

$16x_{31} - 16x_{33} = 0$

$x_{31} = x_{33} \longrightarrow$ Pers.5

Proses normalisasi untuk $\underline{x}_3$:

$$\underline{x}_3 = \frac{\underline{x}_3}{\left(\underline{x}_3^T\,\underline{x}_3\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{32} \end{pmatrix}}{\left(\begin{pmatrix} x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix}\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} x_{33} \\ 0 \\ x_{13} \end{pmatrix}}{\left(\begin{pmatrix} x_{33} & 0 & x_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{33} \\ 0 \\ x_{33} \end{pmatrix}\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} x_{33} \\ 0 \\ x_{33} \end{pmatrix}}{(x_{33}{}^2 + x_{33}{}^2)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} x_{33} \\ 0 \\ x_{33} \end{pmatrix}}{(2x_{33}{}^2)^{1/2}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7071 \\ 0 \\ 0{,}7071 \end{pmatrix}$$

Sehingga, eigenvektor yang didapatkan adalah:

$$X = \begin{bmatrix} -0{,}5774 & -0{,}4082 & 0{,}7071 \\ 0{,}5774 & -0{,}8165 & 0 \\ 0{,}5774 & 0{,}4082 & 0{,}7071 \end{bmatrix}$$

Akan tetapi, untuk prosedur selanjutnya eigenvektor yang digunakan adalah eigenvektor dari kolom yang nilai eigenvalue (λ) lebih dari nol (positif).

$$Q = \begin{bmatrix} -0{,}4082 & 0{,}7071 \\ -0{,}8165 & 0 \\ 0{,}4082 & 0{,}7071 \end{bmatrix}$$

<u>Eigenvektor Matrik BB^T</u>:

- Untuk $\lambda_1 = 12$ $\quad (D - \lambda_1 I)\ \underline{x_1} = \underline{0}$

$$\begin{bmatrix} 24-\lambda & 12 \\ 12 & 24-\lambda \end{bmatrix} \underline{x_1} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 24-12 & 12 \\ 12 & 24-12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 12 \\ 12 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 12x_{11} + 12x_{12} \\ 12x_{11} + 12x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12x_{11} + 12x_{12} = 0 \\ 12x_{11} + 12x_{12} = 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \text{Pers.1} \\ \longrightarrow \text{Pers.2} \end{matrix}$$

$12x_{11} + 12x_{12} = 0$

$x_{11} + x_{12} = 0$

$x_{11} = -x_{12} \longrightarrow$ Pers.3

Proses normalisasi untuk $\underline{x_1}$:

$$\underline{x_1^*} = \frac{\underline{x_1}}{\left(\underline{x_1^T}\,\underline{x_1}\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}}{\left((x_{11} \quad x_{12}) \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} \right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} -x_{12} \\ x_{12} \end{pmatrix}}{\left((-x_{12} \quad x_{12}) \begin{pmatrix} -x_{12} \\ x_{12} \end{pmatrix} \right)^{1/2}}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -x_{12} \\ x_{12} \end{pmatrix}}{(x_{12}{}^2 + x_{12}{}^2)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} -x_{12} \\ x_{12} \end{pmatrix}}{(2x_{12}{}^2)^{1/2}} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}7071 \\ 0{,}7071 \end{pmatrix}$$

- Untuk $\lambda_2 = 36$ $\qquad$ $(D - \lambda_2 I)\ \underline{x_2} = \underline{0}$

$$\begin{bmatrix} 24-\lambda & 12 \\ 12 & 24-\lambda \end{bmatrix} \underline{x_2} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 24-36 & 12 \\ 12 & 24-36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} -12 & 12 \\ 12 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} -12x_{21} + 12x_{22} \\ 12x_{21} - 12x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -12x_{21} + 12x_{22} = 0 \\ 12x_{21} - 12x_{22} = 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \text{Pers.1} \\ \longrightarrow \text{Pers.2} \end{matrix}$$

$-12x_{21} + 12x_{22} = 0$

$-x_{21} + x_{22} = 0$

$x_{21} = x_{22} \longrightarrow$ Pers.3

Proses normalisasi untuk $\underline{x}_2$:

$$\underline{x}_2^* = \frac{\underline{x}_2}{\left(\underline{x}_2^T \underline{x}_2\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}}{\left((x_{21} \quad x_{22}) \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} \right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}}{\left((x_{21} \quad x_{22}) \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} \right)^{1/2}}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}}{(x_{21}{}^2 + x_{12}{}^2)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}}{(2x_{22}{}^2)^{1/2}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7071 \\ 0{,}7071 \end{pmatrix}$$

Sehingga, eigenvektor yang didapatkan adalah:

$$Y = \begin{bmatrix} -0{,}7071 & 0{,}7071 \\ 0{,}7071 & 0{,}7071 \end{bmatrix}$$

4. Dekompisisi Nilai Singular (SVD) Matrik B

Diketahui: $\Delta^2 = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 36 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta = \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 \\ 0 & \sqrt{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}464 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$$\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{12} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2887 & 0 \\ 0 & 0{,}1667 \end{bmatrix}$$

Didapatkan:

$$P_1 = B\, Q_1\, \Delta^{-1}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}4082 & 0{,}7071 \\ -0{,}8165 & 0 \\ 0{,}4082 & 0{,}7071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}2887 & 0 \\ 0 & 0{,}1667 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2{,}4494 & 4{,}2426 \\ -2{,}4494 & 4{,}2426 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}2887 & 0 \\ 0 & 0{,}1667 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0{,}7071 & 0{,}7071 \\ -0{,}7071 & 0{,}7071 \end{bmatrix}$$

Dekomposisi matrik B = $P_1 \Delta Q_1^T$

$$B = \begin{bmatrix} 0,7071 & 0,7071 \\ -0,7071 & 0,7071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,464 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,4082 & -0,8165 & 0,4082 \\ 0,7071 & 0 & 0,7071 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2,4494 & 4,2426 \\ -2,4494 & 4,2426 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,4082 & -0,8165 & 0,4082 \\ 0,7071 & 0 & 0,7071 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2,0001 & -2,0000 & 3,9999 \\ 3,9999 & 2,0000 & 2,0001 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Vector Norms and Matrix Norms

VECTOR NORM

Norm merupakan konsep yang dimaksudkan untuk memperluas pengertian *magnitude* atau “besar” sebuah besaran scalar dan vector atau bisa juga norm mendefinisikan panjang suatu vector di ruang Euclidean (system koordinat yang lazim digunakan. Untuk lebih mudahnya, pada konsep panjang kita dapat membandingkan mana yang lebih besar antara dua buah vector yaitu dengan membandingkan panjang keduanya.

Norm didefinisikan dengan symbol ||•||

Besaran vektor$\underline{x} = (x_i) \in R^n$ dinyatakan "panjang" atau "besar"-nya dengan norm dari $\underline{x}$, dilambangkan oleh ||x||. Dalam literature dikenal ada 3 buah definisi tentang ||x||:

1. norm-1 : $\|x\|_1 \equiv \sum_{i=1}^{n} |x_i|$;
2. norm-2 : $\|x\|_2 \equiv \|x\| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}} = (\underline{x}^T\underline{x})^{1/2}$;
3. norm-∞ : $\|x\|_\infty \equiv \max(\,|x_i|\,;\ i = 1,2,..,n\,)$.

Ketiga definisi ini masing-masing memenuhi 3 sifat-dasar, yaitu definit positif, homogeny dan memiliki sifat ketidaksamaan segitiga. Antara lain :

(i) Positif ||x|| ≥0

Pembuktian : Vector x = 3i + 4j. Maka||x|| $= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Vector x = -3i -4j. Maka||x|| $= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

Jadi norm dari suatu vector akan selalu bernilai positif untuk semua nilai vector (baik itu positif maupun negative)

(ii) Definit positif ||x|| = 0 jika dan hanya jika x = 0

(iii) Homogen ||αx|| = |α|.||x|| ,dimana α merupakan nilai skalar

Pembuktian :

Misalkan α = 5 dan x = 3i+4j.

Maka ||αx|| = |α|.||x||

$||5(3i+4j)|| = |5|.||3i+4j||$

$||15i + 20j|| = |5|.5$

$\sqrt{15^2 + 20^2} = 25$

$\sqrt{625} = 25$

$25 = 25$ (Terbukti)

(iv) Sifat segitiga $||x+y|| \leq ||x||+||y||$

Pembuktian :

Misalkan $x = 3i+4j$, $y = 2i+3j$

Maka $||x+y|| \leq ||x||+||y||$

$||(3i+2i) + (4j+3j)|| \leq ||3i+4j|| + ||2i+3j||$

$||5i + 7j|| \leq 5 + 3{,}605$

$\sqrt{5^2 + 7^2} \leq 5 + 3{,}605$

$8{,}602 \leq 8{,}605$ (Terbukti)

MATRIX NORM

Norm juga digunakan pada matriks. Ruang matriks M_n adalah suatu ruang vector berdimensi n^2. Dengan demikian sifat-sifat norm vektor di ruang berdimensi-hingga tetap berlaku di sana. Perbedaannya, untuk sembarang A dan B di M_n kita dapat mengalikan keduanya yang menghasilkan matriks baru AB di Mn juga. Sangatlah wajar jika kita menginginkan suatu ukuran matriks yang memberikan hubungan antara ukuran ketiganya

Suatu fungsi$||.||$: $M_n \rightarrow R$ disebut norm matriks jika untuk sembarang A, $B \in Mn$ berlaku lima sifat berikut:

(1). $||A|| \geq 0$ untuk norm matrix akan selalu bernilai positif

(1a).$||A|| = 0$ jika dan hanya jika $A = 0$

(2). $||cA|| = |c|.||A||$ untuk semua scalar kompleks c.

(3). $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$

(4). $||AB|| \leq |A|.||B||$(sub-multiplikatif)

Pada definisi di atas keempat sifat pertama tidak lain merupakan sifat-sifat norm vektor. Adapun sifat terakhir ditambahkan untuk menghubungkan "ukuran" matriks – matriks *A*, *B* dan hasil perkalian keduanya yaitu matriks *AB*. Inilah yang membedakan Norm matriks dengan norm vektor.

Dengan melihat keterkaitan antara ruang *Mn* dan *Cn* maka kita dapat mendefinisikan suatu norm di *Mn* dengan melibatkan norm di *Cn* seperti pada definisi berikut.

Norm matriks yang dibangunoleh norm vector. (Induced Norm)

Misalkan $||.||$ adalah norm vector di C^n(n merupakan kolom matriks) dan C^m(m merupakan baris matriks) ,yaitu $||.|| : C^{m \times n} \rightarrow R$, didefinisikan matrix p-norm :

$$||A||_p = \max\{||Ax||_p : x \in C^n \text{ dengan } ||x|| = 1$$

$$= \max \{\frac{||Ax||p}{||x||} : x \in C^n \text{ dengan } ||x|| \neq 0\}$$

Untuk p = 1, 2, dan ∞

Untuk p =1

$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |aij|$,nilai maksimum dari masing-masing penjumlahan kolom matriks.

Contoh :

$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

$\|A\|_1$= max (3+2+0, 5+6+2, 7+4+8) = max (5,13,19) = 19

Jadi $\|A\|_1$ = 19

Untuk p = ∞

$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |aij|$,nilai maksimum dari masing-masing penjumlahan baris matriks.

Contoh :

$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

$\|A\|_\infty$= max (3+5+7, 2+6+4, 0+2+8) = ma x(15,12,10) = 15

Jadi $\|A\|_\infty$ = 15

Untuk p= 2 atau sering disebut dengan Euclidian norm / spectral norm.

$\|A\|_2 = \|A\| = \sqrt{\lambda \max(A * A)}$ = (akar dari nilai eigen maksimal dari (A transpose x A)

Contoh :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$A^*A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 14 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}$

$\lambda \max(A * A)$ = |SI – (A*A)|

$= \left| \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 14 \\ 14 & 10 \end{bmatrix} \right|$

$= \left| \begin{bmatrix} S-20 & -14 \\ -14 & S-10 \end{bmatrix} \right|$

= (S-20)(S-10) - 196

= S^2- 30S + 200 -196

= S^2-30S + 4

$S_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$= \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2-4(4)}}{2}$

$= \frac{30 \pm \sqrt{900-16}}{2}$

$= 15 \pm 14{,}86$

S_1 = 15 + 14,86 = 29,86 (nilai eigen maksimal)

S_2 = 15 –14,86 = 0,14

Jadi $\|A\|_2 = \|A\| = \sqrt{29{,}86} = 5{,}4644$

FROBENIOUS NORM

Matriks norm yang lain yang sering digunakan adalah frobenius form. Frobenius form dituliskan:

$||A||_f := \sqrt{trace(A * A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |aij|^2} = \sqrt{\sum_i \partial_i^2}$

Lebih mudahnya, perhitungan frobenius form adalah akar dari jumlah kuadrat nilai eigen dari (A transpose x A).

Contoh:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$A^*A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 14 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}$

$\lambda \max(A * A) = |SI - (A^*A)|$

$= |\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 14 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}|$

$= |\begin{bmatrix} S - 20 & -14 \\ -14 & S - 10 \end{bmatrix}|$

$= (S-20)(S-10) - 196$

$= S^2 - 30S + 200 - 196$

$= S^2 - 30S + 4$

$S_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(4)}}{2}$

$= \frac{30 \pm \sqrt{900 - 16}}{2}$

$= 15 \pm 14,86$

$S_1 = 15 + 14,86 = 29,86$

$S_2 = 15 - 14,86 = 0,14$

Maka $||A||_f = \sqrt{S_1^2 + S_2^2} = \sqrt{29,86^2 + 0,14^2} = 29.86$